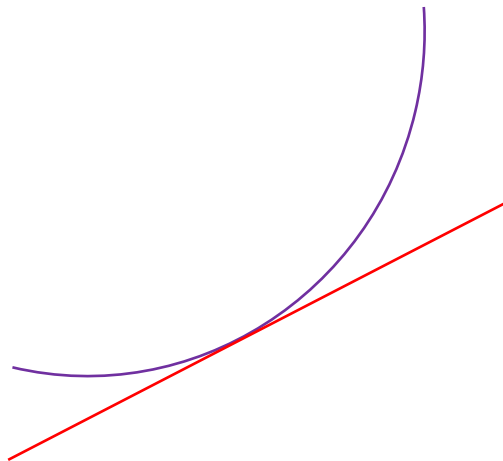


מתמטיקה

לביולוגים

1



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 (חדו"א 1) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il

הפתרונות מוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לצפיה בשיעור חינם בעמוד הקורס: [חדו"א 1](#)

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



תוכן

4	פרק 1 - גבול של פונקציה
9	פרק 2 - סדרות
12	פרק 3 - גזירה של פונקציה
15	פרק 4 - בעיות משיקים (המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת)
17	פרק 5 - כלל לופיטל
20	פרק 6 - חקירת פונקציה
25	פרק 7 - מקסימום ומינימום מוחלטים של פונקציה
26	פרק 8 - האינטגרל הלא מסוים (אינטגרל מיידי)
27	פרק 9 - האינטגרל הלא מסוים (הנגזרת כבר בפנים)
28	פרק 10 - האינטגרל הלא מסוים (אינטגרציה בחלקים)
29	פרק 11 - האינטגרל הלא מסוים (שיטת ההצבה)
30	פרק 12 - האינטגרל הלא מסוים (פונקציות רציונליות)
31	פרק 13 - האינטגרל הלא מסוים (אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות)
34	פרק 14 - האינטגרל המסוים
36	פרק 15 - שימושי אינטגרל המסוים (שטח ואורך קשת)
42	פרק 16 - אינטגרלים לא אמיתיים (מוכללים)
43	פרק 17 - נגזרות חלקיות, דיפרנציאביליות
46	פרק 18 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט
48	פרק 19 - פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות, שימושים גיאומטריים
50	פרק 20 - קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)
52	פרק 21 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')
54	פרק 22 - קיצון תחת אילוצים של פונקציה של שלושה משתנים (כופלי לגרנג')
56	פרק 23 - קיצון מוחלט של פונקציה רציפה בקבוצה סגורה וחסומה
57	פרק 24 - חוקי חזקות ומשוואות מעריכיות ולוגריתמיות
84	נוסחאות - גבולות
85	נוסחאות - נגזרות
87	נוסחאות - אינטגרלים
88	נוסחאות - טריגו
89	נוסחאות - אלגברה
90	נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות

פרק 1 - גבול של פונקציה

(1) חשב את הגבולות הבאים (הצבה):

$$\lim_{x \rightarrow 100} 20 \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1 \quad (1)$$

(2) חשב את הגבולות הבאים (צמצום/פירוק לגורמים):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x-1} \quad (4) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x-1} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x-3} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x+1} \quad (7) & \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x-2} \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5) \\ & & & \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9) \end{aligned}$$

(3) חשב את הגבולות הבאים (כפל בצמוד):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 1} \quad (4) & \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1-x} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x^2 + x + 2} + x} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1-x} \quad (7) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5) \end{aligned}$$

(4) חשב את הגבולות הבאים (היעזר בגבול הטריגונומטרי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7) \end{aligned}$$

(5) חשב את הגבולות הבאים (פונקציה השואפת לאינסוף):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4) & \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3) \quad (7) & \quad \lim_{x \rightarrow 2} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{2^x}} \quad (11) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + \frac{1}{2^x}} \quad (10) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \frac{1}{2^x}} \quad (9) \end{aligned}$$

(6) חשב את הגבולות הבאים (x שואף לאינסוף) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x} - x \right) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x \right) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x \right) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + kx} - x \right) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx} \right) \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$$

(7) חשב את הגבולות הבאים (העזר בגבול של אוילר $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^x \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3} \right)^x \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x} \right)^x \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x + 2} \right)^{10x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4} \right)^{4x^2} \quad (7)$$

(8) חשב את הגבולות הבאים (ע"י שימוש בכלל הסנדוויץ'):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [x] \quad (10)$$

(9) חשב את הגבול של $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ של הפונקציות הבאות (גבול של פונקציה מפוצלת):

$$(a=1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x-1} & x > 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x < 1 \end{cases} \quad (2) \quad (a=0) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(a=\infty) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (4) \quad (a=0) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (3)$$

$$(a=-\infty) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (5)$$

(10) חשב על פי הגדרת הגבול את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} \quad (5)$$

$$(8) \text{ הוכח על פי הגדרה את הגבול: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1$$

הערה חשובה מאוד !

במרבית קורסי החדו"א לומדים בהמשך את כלל לופיטל לחישוב גבולות. בעזרת כלל זה ניתן לחשב ללא מאמץ את הגבולות המופיעים בשאלות 2, 3 ו-4.

פתרונות:

									(1)
						40 (4	2 (3	$\frac{11}{12}$ (2	21 (1
									(2)
$\frac{8}{17}$ (9	27 (8	3 (7	32 (6	-3 (5	$n-1$ (4	6 (3	$\frac{10}{8.5}$ (2	$\frac{5}{6}$ (1	
									(3)
	$-\frac{8}{3}$ (8	$\frac{1}{3}$ (7	$\frac{3}{4}$ (6	$\frac{1}{6}$ (5	$\frac{3}{8}$ (4	$\frac{-1}{12}$ (3	4 (2	$\frac{1}{2}$ (1	
									(4)
1 (9	4 (8	$\frac{1}{8}$ (7	$\frac{1}{2}$ (6	$\frac{1}{2}$ (5	$\frac{1}{2}$ (4	$\frac{1}{2}$ (3	$\frac{3}{4}$ (2	$\frac{3}{4}$ (1	
									(5)
0 (9	ϕ (8	∞ (7	∞ (6	$-\infty$ (5	ϕ (4	$-\infty$ (3	ϕ (2	ϕ (1	
						$-\infty$ (12	ϕ (11	1 (10	
									(6)
-3 (9	-1 (8	1 (7	-5 (6	0 (5	$-\infty$ (4	4 (3	$-\frac{\pi}{2}$ (2	0 (1	
$e^{\frac{1}{3}}$ (18	$\ln 3$ (17	2 (16	$\frac{1}{9}$ (15	4 (14	0 (13	0.25 (12	$\frac{1-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$ (11	1.5 (10	
	$\frac{a-b}{2}$ (26	1/2 (25	-1/2 (24	1/2 (23	$k/2$ (22	2.5 (21	(**) (20	0 (19	
									(7)
e (9	e^{30} (8	e^{-12} (7	e (6	e^3 (5	e^{-1} (4	e^2 (3	1 (2	$e^{\frac{1}{2}}$ (1	
									(8)
1 (9	4 (8	0.75 (7	0 (6	0 (5	3 (4	0.75 (3	0 (2	0 (1	
								0 (10	
									(9)
					-1 (5	1 (4	ϕ (3	ϕ (2	4 (1
									(10)
	$\pm\infty$ (7	$\sin \pi / 4$ (6	1 (5	5 (4	0 (3	9 (2	28 (1		

(**) בשאלה 6 תרגיל 20 יש להפריד לשלושה מקרים:

$$\lim = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \Leftarrow b \neq 0 \text{ (I)}$$

$$\lim = \infty \Leftarrow a > 0, b = 0 \text{ (II)}$$

$$\lim = -\infty \Leftarrow a < 0, b = 0 \text{ (III)}$$

פרק 2 - סדרות

(1) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^3 + 10n} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n})^{\ln n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 5n + 6}{2n + 10} - \frac{n}{2} \right) \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^5 + 10n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16^n + 4^{n+1}}{2^{4n+2} + 2^{n+3}} \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1} - \sqrt{5n-1}} \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 2n^2 + 6 + 27n^6}}{\sqrt{3n^3 + 10n + 4n^4}} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3n^3 - 5n - 1}{n^3 - 2n^2 + 1} \right) \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n}} \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^n + 3^{n+1}}{81^{0.5n} + 3^{n+3}} \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n) \quad (15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}} \quad (14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^4 + 10n}} \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2) \quad (18)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \quad (17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + kn} - n) \quad (16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n \quad (21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n \quad (20)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - \sqrt{n^2 + bn}) \quad (19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-3} \right)^n \quad (24)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{n^2-1} \quad (23)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n} \right)^n \quad (22)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{n} \right)^n \quad (27)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 4n + 1}{n^2 + 2n + 2} \right)^{10n} \quad (26)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n + 4} \right)^{4n^2} \quad (25)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \sin n}{4n + \cos n} \quad (30)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(2n+1)}{n} \quad (29)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \quad (33)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \arctan(2n-3)}{4n + \arctan(n - \ln n)} \quad (32)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n + \sin 2n}{n^2 + \cos 3n} \quad (31)$$

הערה חשובה מאוד !

בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה n , המשתנה x . יש להתייחס אל x כאל מספר טבעי ! בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

(2) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \quad (3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} \quad (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{4n + \frac{1}{n}}} \quad (6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n} \quad (5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{4n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3 + n^2 + 1} \quad (9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 4n + 1} \quad (8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin\left(\frac{4}{n}\right) \quad (7)$$

$$4^n \sin \frac{1}{n} \quad (12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n + (-1)^n}{n} \right]^n \quad (11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi n}{2} \quad (10)$$

(3) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \quad (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \quad (4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} \quad (3)$$

* רמזים : סעיף 1 - $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$. סעיף 2 - הוכח כי $a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

(4) בתרגילים הבאים נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה).

הוכח שהסדרה מתכנסת וחשב את גבולה.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right), a_1 = 2 \quad (3) \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}, a_1 = 2 \quad (2) \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, a_1 = \sqrt{2} \quad (1)$$

(5) נתונה הסדרה $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}, a_1 = 1, a_2 = 1$ א. 1. נגדיר סדרה חדשה b_n על ידי: $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$. הוכח שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ קיים וחשב אותו.2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכח שהסדרה a_n שואפת לאינסוף.ב. 1. מצא ביטוי סגור עבור הסדרה a_n (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

2. ענה שוב על סעיף א.1. בעזרת הביטוי הסגור שמצאת.

3. הוכח באינדוקציה שהביטוי הסגור שמצאת בסעיף הקודם הוא אכן נכון.

(6) על סמך ההגדרה של גבול של סדרה הוכח כי :

$$\begin{array}{lll} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sin n}{2n^2 + 3} = \frac{1}{2} \quad \text{ג.} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1 \quad \text{ב.} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{4n + 3} = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \cos^2 n}{n^2 + 2} = 0 \quad \text{ו.} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n + 3} = 2 \quad \text{ה.} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1} = 1 \quad \text{ד.} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - n^2 + 5n + 6 = \infty \quad \text{ט.} & \lim_{n \rightarrow \infty} 2n + 4 = \infty \quad \text{ח.} & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n) = 2 \quad \text{ז.} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{n} = -\infty \quad \text{יב.} & \lim_{n \rightarrow \infty} e^{2n+1} = \infty \quad \text{יא.} & \lim_{n \rightarrow \infty} \log(2n + 5) = \infty \quad \text{י.} \end{array}$$

(7) הוכח או הפרך :

- (1) אם a_n סדרה חסומה אז יש לה גבול.
- (2) אם b_n סדרה לא חסומה אז $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$.
- (3) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = k$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = k$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -k$.
- (4) אם d_n סדרה עולה אז היא לא חסומה.
- (5) אם ל- a_n ו- b_n אין גבול אז גם ל- $(a_n + b_n)$ וגם ל- $(a_n \cdot b_n)$ אין גבול.
- (6) אם ל- a_n ו- b_n אין גבול אז גם ל- (a_n / b_n) אין גבול.
- (7) אם a_n מתכנסת ו- b_n מתבדרת, אז $(a_n \cdot b_n)$ מתבדרת.
- (8) אם a_n מתכנסת ו- b_n מתבדרת, אז $(a_n \cdot b_n)$ מתכנסת.
- (9) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{L}$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = L$.
- (10) אם $a_n < b_n$ לכל n אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.
- (11) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ואם b_n חסומה אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$.
- (12) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k$ ואם $a_n < 1$ לכל n אז $k < 1$.
- (13) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = 1$.

פתרונות:

- (1) (1) 0 (2) 4 (3) ∞ (4) 0 (5) -5 (6) 1 (7) 1.5 (8) $\frac{1-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$ (9) 0.25 (10) 4 (11) 2
- (12) $\ln 3$ (13) $e^{1/3}$ (14) $(b \neq 0) \Leftrightarrow (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt[n]{a/b}) \Leftrightarrow (a > 0, b = 0)$
- $(a < 0, b = 0) \Leftrightarrow (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty)$ (15) 2.5 (16) $\frac{k}{2}$ (17) 0.5 (18) 0.5 (19) $\frac{a-b}{2}$ (20) $e^{0.5}$
- (21) 1 (22) e^{-1} (23) e^3 (24) e^{-12} (25) e^{30} (26) e (27) 0 (28) 0 (29) 0 (30) 0.75 (31) 3
- (32) $\frac{3}{4}$ (33) 4 (2) 0 (1) 0 (2) 0 (3) 4 (4) $\frac{1}{4e}$ (5) ∞ (6) 1 (7) 4 (8) 0.5 (9) $\frac{1}{3}$
- (10) אין גבול. (11) אין גבול. (12) ∞ (3) 1 (1) 1 (2) 0 (3) 1 (4) 1 (4) (1) הגבול 2.
- (2) הגבול 1. (3) הגבול 1. (5) א.1. הגבול $\frac{1}{3}$. ב.1. $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \cdot (-1)^n$

לפתרון מלא בסרטון ודאו היכנסו ל- www.Gool.co.il

פרק 3 - גזירה של פונקציה

(1) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות (בסעיפים 27-29 גזור פעם אחת) :

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \cos(x^4) \quad (21) \quad f(x) = \sin(x^3) \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$f(x) = \ln(\cos x^2) \quad (24) \quad f(x) = \tan(x^2) \quad (23) \quad f(x) = \sin^3 x \quad (22)$$

$$f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (27) \quad f(x) = \arctan(x^2) \quad (26) \quad f(x) = \arcsin(2x+3) \quad (25)$$

$$f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (29) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (28)$$

פתרונות:

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2) \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3} \quad (4) \quad (3)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6) \quad (5)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (10) \quad (7)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (12) \quad (8)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (15) \quad (9)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (14) \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x + 2}{x^4} \right) \quad f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1 + 2x}{x^4} \right) \quad (16) \quad (15)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3 \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2 - 1)^{5/3}} \quad (19)$$

$$f'(x) = \frac{2 - 5x}{3 \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1 + 5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (20)$$

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, \quad f''(x) = -9x^4 \sin(x^3) + 6x \cdot \cos(x^3) \quad (21)$$

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3, \quad f''(x) = -16x^6 \cos(x^4) - 12x^2 \cdot \sin(x^4)$$

(22)

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x, \quad f''(x) = 6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x$$

(23)

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) \sin(x^2)}{\cos^4(x^2)}$$

(24)

$$f'(x) = \tan(x^2) \cdot (-2x), \quad f''(x) = \frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)} - 2 \tan(x^2)$$

(25)

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 3x - 2}}, \quad f''(x) = \frac{2x + 3}{2(-x^2 - 3x - 2)^{3/2}}$$

(27)

$$f'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right)$$

(26)

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$$

(29)

$$f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right)$$

(28)

$$f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + \cot x \cdot x)$$

פרק 4 - בעיות משיקים (המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת)

- (1) הישר $y = x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.
- (2) הישר $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.
- (3) הישר $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.
- (4) הישר $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודה $x = 0$. מצא את a ו- c .
- (5) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $x = e$.
- (6) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 + 1$ בנקודה $x = 0$.
- (7) מצא את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$ בנקודה $(3, 4)$.
- (8) הפונקציות $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ משיקות זו לזו. מצא את k ואת נקודת ההשקה.
- (9) מצא את נקודת ההשקה ואת משוואת המשיק לגרף העקומה העובר דרך הנקודה הנתונה.
 א) $(2, -3)$ $y = x^2 - 2x + 1$ ב) $(-3, 1)$ $y = \sqrt{x}$
- (10) מצא את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות:
 $y = x^2$ ו- $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$
- (11) מצא את הזווית בין הפונקציות $y = f(x) = x^2$ ו- $y = g(x) = \frac{1}{x}$.
- (12) מצא את הזווית בין המעגל $x^2 + y^2 = 8$ והפרבולה $y^2 = 2x$.
- (13) הוכח שהאליפסה $x^2 + 2y^2 = 8$ וההיפרבולה $x^2 - y^2 = 2$ נחתכות בזווית ישרה.

פתרונות:

- (1) נקודת ההשקה היא $(0,1)$ ומשוואת המשיק היא $y = x + 1$.
- (2) נקודת ההשקה היא $(-1,5)$ ומשוואת המשיק היא $y = 4x + 9$.
- (3) נקודת ההשקה היא $(4,12)$ ו- $b = 4$.
- (4) נקודת ההשקה היא $(0, \frac{1}{2})$ ומשוואת המשיק היא $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$.
- (5) משוואת המשיק היא $y = \frac{1}{e}x$.
- (6) משוואת המשיק היא $y = 1$.
- (7) משוואת המשיק היא $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$.
- (8) נקודת ההשקה $(1,1)$, $k = 1.5$.
- (9) א) $(0,1)$, $y = -2x + 1$, $(4,9)$, $y = 6x - 15$.
- ב) המשיק: $(9,3)$, $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$.
- (10) $y = 2x - 1$, $y = -2x - 1$
- (11) 71.57°
- (12) 71.56°

פרק 5 - כלל לופיטל

(1) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x-1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x-2} - 1} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1} - 2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x-1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x+1) + x}{x} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax^2)}{bx^2} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4} \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 3x)}{\arcsin(x^2 - 4x)} \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x^2)}{x^4} \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (30)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh x - 2}{1 - \cos 2x} \quad (29)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sinh x} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (33)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (32)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (31)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (36)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} \quad (35)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} \quad (34)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \ln x \quad (39)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (38)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (37)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x - 3) \quad (42)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (41)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x \quad (40)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad (45)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (44)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(\frac{x+3}{x-3} \right) \quad (43)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (48)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(3x) - \ln(\sin 5x)] \quad (47)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (46)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x \quad (a > 0) \quad (51)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \quad (50)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (49)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} \quad (54)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2} \quad (53)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 4)^{x-2} \quad (52)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}} \quad (57)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (56)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 3x)^{\frac{1}{x}} \quad (55)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\cot x} \quad (60)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x} \quad (59)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x} \quad (58)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (63)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2)^{\cot^2 x} \quad (62)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x)^{\tan x} \quad (61)$$

(2) כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. הראה זאת והסבר מדוע למרות כך, כלל

לופיטל אינו ישים, לבסוף חשב את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (1)$$

לפתרון מלא בסרטון ודאו היכנסו ל- www.Gool.co.il

כתב ופתר - גיא סלומון ©

פתרונות:**(1)**

$\frac{5}{6}$ (7)	$\frac{3}{2}$ (6)	$\frac{1}{6}$ (5)	4 (4)	$n-1$ (3)	$\frac{20}{17}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
2 (14)	$-\frac{1}{2}$ (13)	$\frac{1}{6}$ (12)	$\frac{1}{2}$ (11)	$\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ (10)	1 (9)	$-\frac{3}{2}$ (8)
$\frac{1}{2}$ (21)	$\frac{1}{2}$ (20)	$\frac{1}{6}$ (19)	$\frac{a}{b}$ (18)	$\frac{a}{b}$ (17)	1 (16)	1 (15)
1 (28)	1 (27)	$-\frac{3}{4}$ (26)	$-\frac{1}{2}$ (25)	$-\frac{1}{3}$ (24)	$\frac{1}{3}$ (23)	$\frac{1}{8}$ (22)
0 (35)	∞ (34)	0 (33)	∞ (32)	$\frac{1}{2}$ (31)	$\frac{1}{2}$ (30)	$\frac{2}{3}$ (29)
0 (42)	0 (41)	0 (40)	0 (39)	0 (38)	0 (37)	1 (36)
$\frac{1}{2}$ (49)	$\ln\frac{3}{5}$ (48)	0.5 (47)	0 (46)	2.5 (45)	6 (44)	0 (43)
1 (56)	e^2 (55)	1 (54)	1 (53)	1 (52)	e (51)	$-\frac{1}{2}$ (50)
1 (63)	e (62)	1 (61)	1 (60)	$e^{-1/2}$ (59)	$e^{1/3}$ (58)	e^3 (57)
					$e^{-1/6}$ (65)	e (64)
						(2)
				0.75 (3)	0.25 (2)	1 (1)

פרק 6 - חקירת פונקציה

(1) חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה לפי הפירוט הבא: תחום הגדרה ורציפות, נקודות חיתוך עם הצירים, זוגיות, אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה, נקודות פיתול, תחומי קמירות וקעירות, גרף.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (3)$$

$$f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2)$$

$$f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (8)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (12)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (11)$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (10)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2\ln x - 3 \quad (15)$$

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (14)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (13)$$

$$f(x) = x - e^x \quad (18)$$

$$f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (17)$$

$$f(x) = 4\ln^2 x - 4\ln x - 3 \quad (16)$$

$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (21)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (20)$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (19)$$

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 1\right)^2 \quad (24)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) \quad (23)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (22)$$

$$f(x) = x - 2\arctan x \quad (27)$$

$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (26)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2-1} \quad (25)$$

$$f(x) = 8\cos x + 2\cos 2x - 3 \quad (30) \\ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

$$f(x) = 2\cos^2 x - \sin 2x \quad (29) \\ (0 \leq x \leq \pi)$$

$$f(x) = \arcsin(\sin x) \quad (28)$$

הערות:

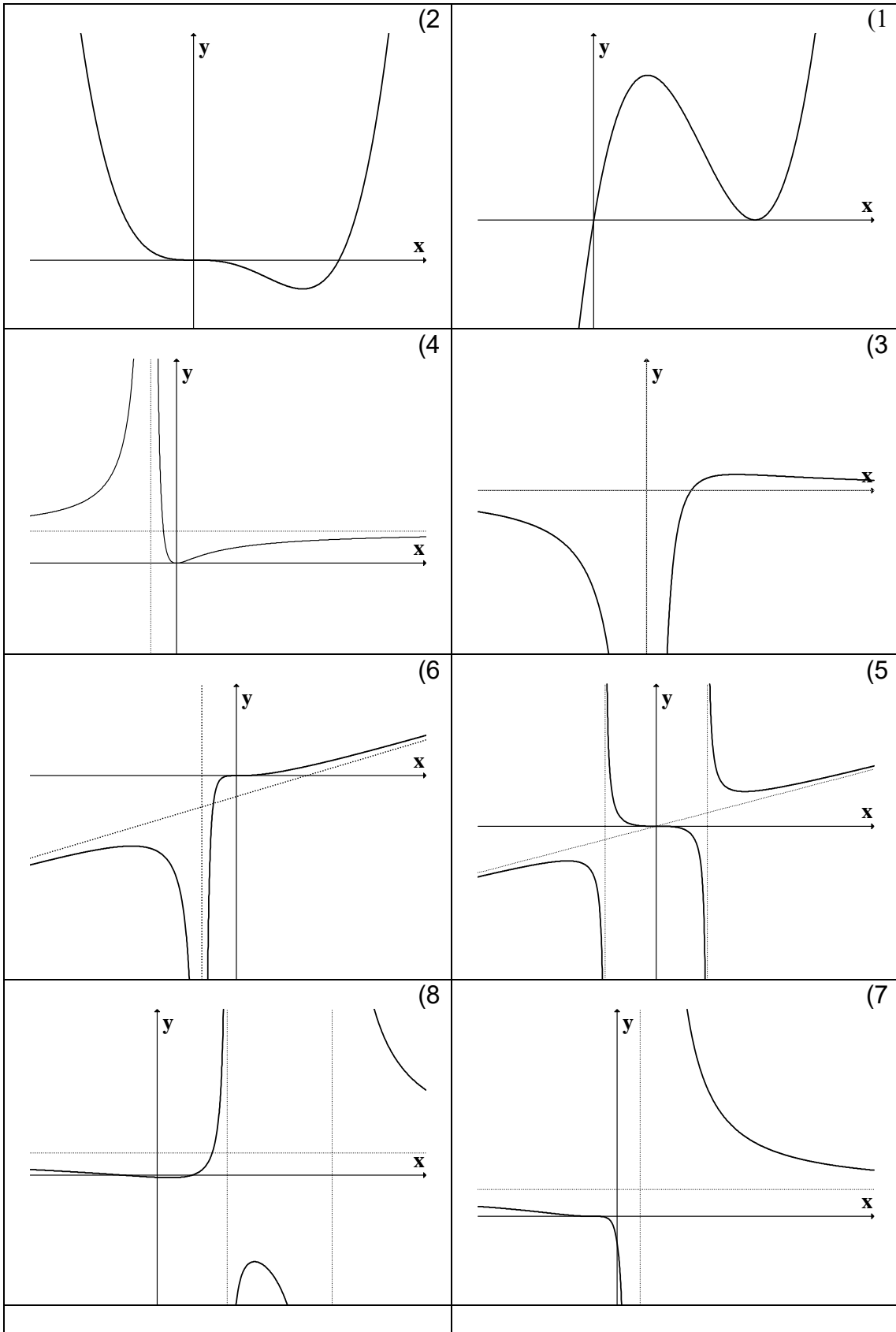
* בשאלה 27 אין צורך למצוא חיתוך עם ציר x . בשאלה 18 מצא את החיתוך רק לאחר השרטוט.

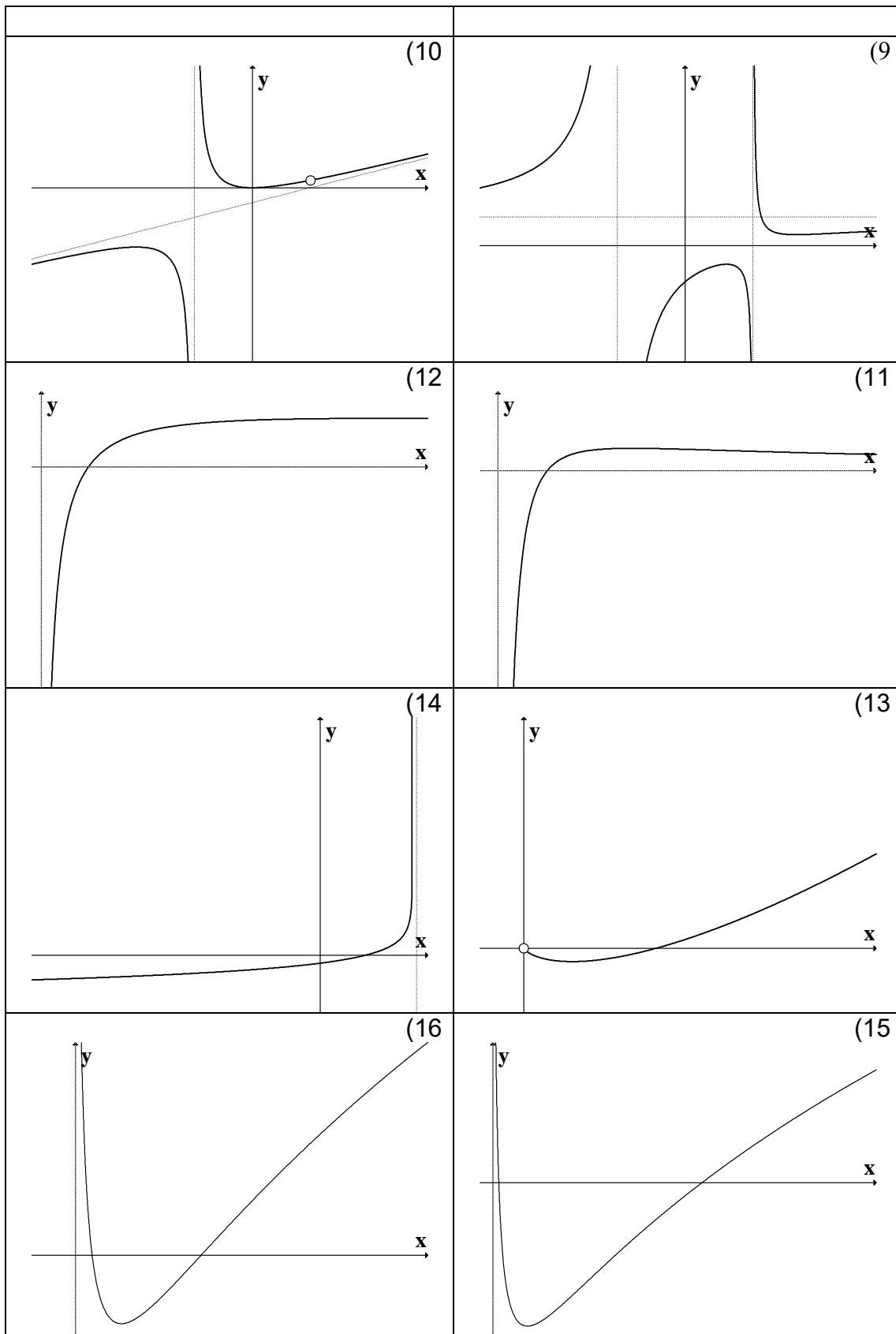
** בתרגילים 1,2,28,29,30 אין צורך למצוא אסימפטוטות (וגם אין).

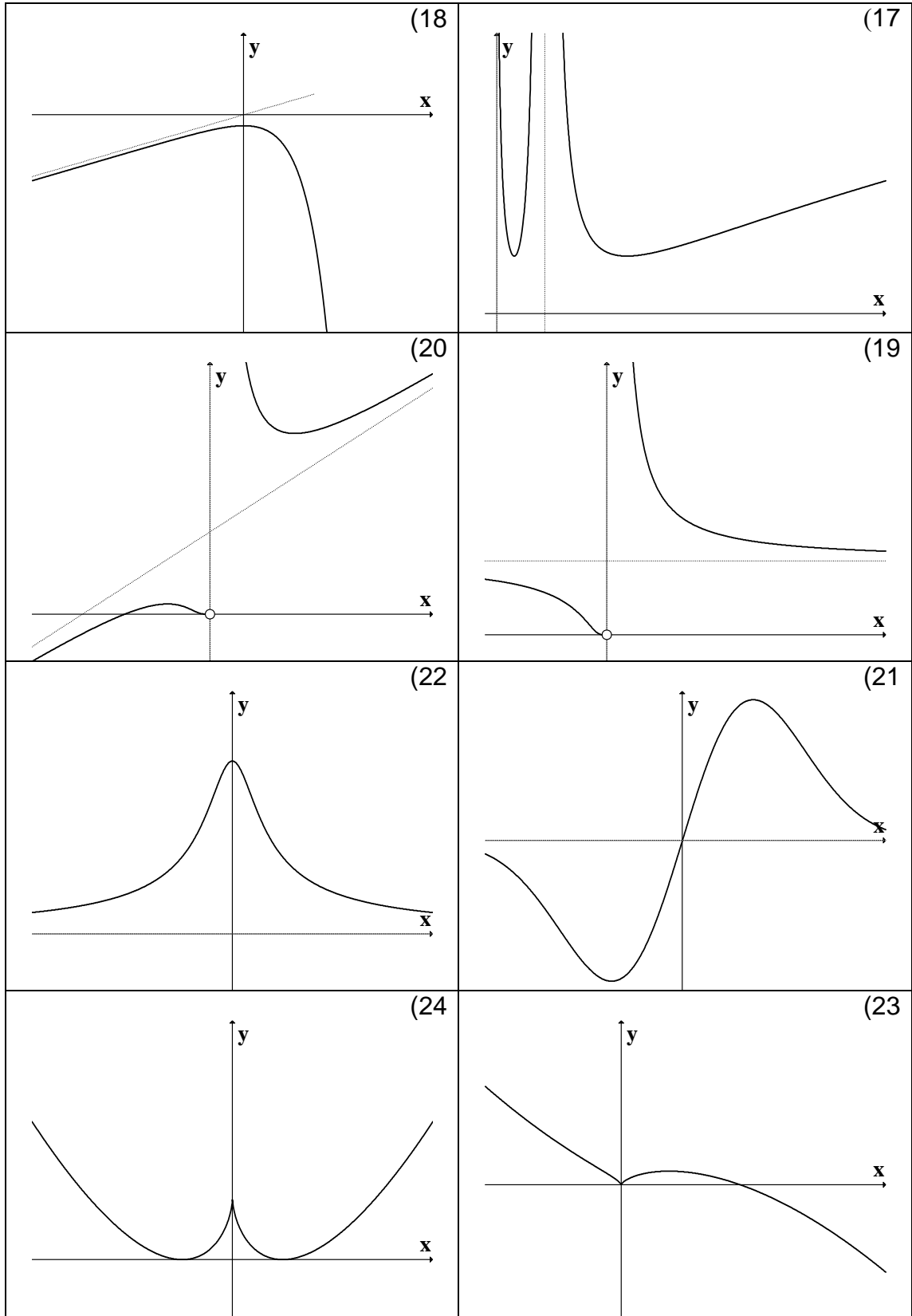
*** בתרגילים 9,17 אין צורך למצוא נקודות פיתול אלא אם כן למדתם ניוטון רפסון. בתרגיל 8 אין צורך למצוא נקודות פיתול אלא אם כן למדתם לפתור משוואה ממעלה שלישית.

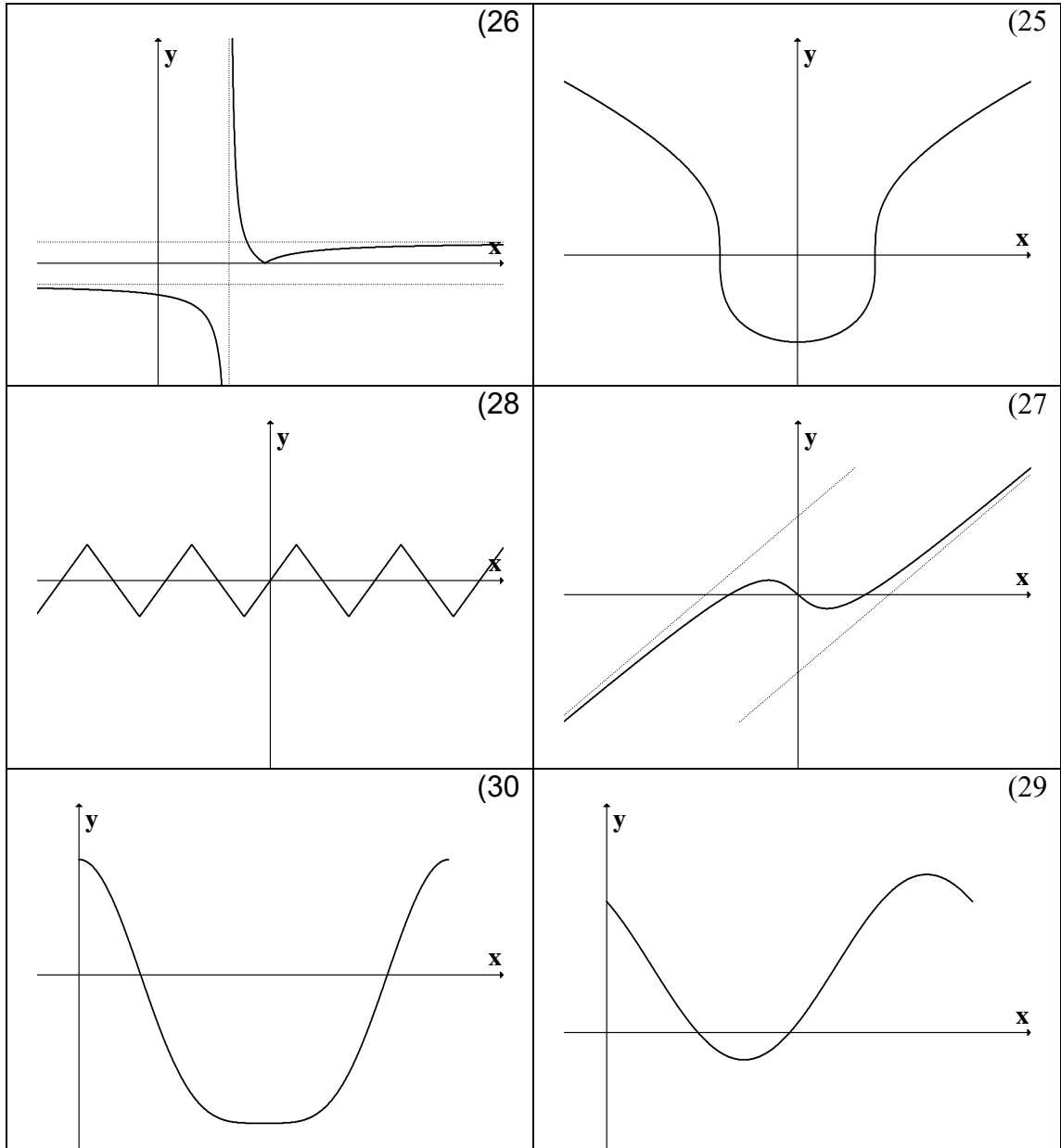
פתרונות:

(1)









פרק 7 - מקסימום ומינימום מוחלטים של פונקציה

(1) מצא את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציות הבאות בתחומים הרשומים לידן (אם יש כאלה):

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5} \quad (2) \quad (-1 \leq x \leq 3) \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}\right) f(x) = \begin{cases} 4x-2 & x < 1 \\ (x-2)(x-3) & x \geq 1 \end{cases} \quad (4) \quad (-1 \leq x \leq 20) \quad f(x) = x^{2/3}(20-x) \quad (3)$$

$$(-5 < x < -1) \quad f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad (6) \quad (-5 \leq x \leq 1) \quad f(x) = 1 + |9 - x^2| \quad (5)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad f(x) = x^3 - 9x + 1 \quad (7)$$

(2) הוכח את אי השוויונים שמימין לגבי התחום הרשום בסוגריים משמאל.

$$(x \leq 1) \quad 0 \leq x^2 e^{x-1} \leq 1 \quad (3) \quad (x \geq 0) \quad x e^{-\sqrt{x}} \leq 1 \quad (2) \quad (x \text{ לכל } x) \quad x^3 e^{-x} \leq \frac{27}{e^3} \quad (1)$$

פתרונות:

(1)

(1) $(-1, -7)$ מינימום מוחלט, $(3, 9)$ מקסימום מוחלט.

(2) $(-1, 0)$ מינימום מוחלט, $(5, 0)$ מינימום מוחלט, $(2, 3)$ מקסימום מוחלט.

(3) $(0, 0)$ מינימום מוחלט, $(20, 0)$ מינימום מוחלט, $(8, 48)$ מקסימום מוחלט.

(4) $(2.5, -0.25)$ מינימום מוחלט, $(1, 2)$ מקסימום מוחלט.

(5) $(-3, 1)$ מינימום מוחלט, $(-5, 17)$ מקסימום מוחלט.

(6) $(-2, -4)$ מקסימום מוחלט. אין מינימום מוחלט.

(7) אין מקסימום ואין מינימום.

הערת סימון:

$$[a, b) \Leftrightarrow a \leq x < b \quad , \quad (a, b) \Leftrightarrow a < x < b \quad , \quad [a, b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$$

פרק 8 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרל מיידי)

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3) \qquad \int x^4 dx \quad (2) \qquad \int 4dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \qquad \int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9) \qquad \int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x}\right) dx \quad (8) \qquad \int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12) \qquad \int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11) \qquad \int (x^2 + 1)(x+2) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15) \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \qquad \int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18) \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \qquad \int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21) \qquad \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24) \qquad \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx \quad (23) \qquad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27) \qquad \int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26) \qquad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25)$$

$$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right) dx \quad (30) \qquad \int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx \quad (29) \qquad \int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32) \qquad \int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

$$\int 2 \sin 4x + \cos x dx \quad (36) \qquad \int \sin \frac{x}{2} dx \quad (35) \qquad \int \cos 4x dx \quad (34)$$

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 9 - האינטגרל הלא מסויים (הנגזרת כבר בפנים)

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3) \qquad \int \cot x dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5) \qquad \int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9) \qquad \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11) \qquad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15) \qquad \int \sin(x^2+1)x dx \quad (14) \qquad \int \cos(10x^4+1)x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{\ln(\tan x)}{\cos^2 x} dx \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \sqrt{x^2+1} \cdot 2x dx \quad (21) \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20) \qquad \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \qquad \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23) \qquad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^2 dx \quad (22)$$

* הערה : את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.
* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 10 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרציה בחלקים)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int x \sin x dx \quad (3) \qquad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \qquad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \qquad \int x \cos 2x dx \quad (4) \qquad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int \ln x dx \quad (7) \qquad \int x^2 e^{-4x} dx \quad (6)$$

$$\int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \qquad \int \arcsin x \quad (10) \qquad \int \arctan x \quad (9)$$

$$\int x \arctan x \quad (14) \qquad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13) \qquad \int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12)$$

$$\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \qquad \int \ln^2 x dx \quad (16) \qquad \int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15)$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \qquad \int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19) \qquad \int e^x \cos x dx \quad (18)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \qquad \int x \tan^2 x dx \quad (22) \qquad \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21)$$

(2) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int x^4 e^x dx$.

(3) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \cos^4 x dx$.

(4) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \cos^4 x dx$.

(5) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$.

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 11 - האינטגרל הלא מסויים (שיטת ההצבה)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים (הצבות רגילות):

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \qquad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \qquad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \qquad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int x^3(3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \qquad \int \cos(x^2+1) \cdot 2x^3 dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \qquad \int \ln^3 x dx \quad (14) \qquad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx \quad (21) \qquad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \qquad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \cdot \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \qquad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

הערה: בחלק מהתרגילים, לאחר ההצבה, תידרש לאינטגרציה בחלקים.

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 12 - האינטגרל הלא מסויים (פונקציות רציונליות)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} \quad (3)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} \quad (11)$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx \quad (12)$$

$$\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{3x^3-5x^2+4x-2}{x-1} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{x^4+2x^3-10x^2-8x}{x+4} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{x^4-2x^3+x^2+x}{(x-1)^2} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{12x^3-11x^2+6x-1}{4x-1} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{x^4-4x^2+x+1}{x^2-4} dx \quad (23)$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x}} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{\sqrt{1+e^x}}{1+e^x} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} dx \quad (4)$$

$$\int \sqrt{1+e^x} dx \quad (6)$$

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 13 - האינטגרל הלא מסויים (אינטגרלים טריגונומטריים והצבות

טריגונומטריות)

אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת זהויות בלבד)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{1}{\sin^2 10x} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 4x} dx \quad (2) \quad \int (\sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3}) dx \quad (1)$$

$$\int (\sin x + \cos x)^2 dx \quad (6)$$

$$\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx \quad (5) \quad \int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{(\sin x \cos x)^2} dx \quad (9)$$

$$\int \tan^2 x dx \quad (8) \quad \int \sin x \cos x \cos 2x dx \quad (7)$$

$$\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx \quad (12) \quad \int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx \quad (11) \quad \int \sin 7x \cos 5x dx \quad (10)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (15)$$

$$\int \sin^2 4x dx \quad (14)$$

$$\int \cos^2 x dx \quad (13)$$

$$\int \sin^4 2x dx \quad (18)$$

$$\int \cos^4 x dx \quad (17)$$

$$\int \sin^3 4x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx \quad (19)$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad (24)$$

$$\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad (23)$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx \quad (22)$$

אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת הצבה טריגונומטרית)
זכור:

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \left. \begin{array}{l} \sin x = t \\ (x = \arcsin t) \end{array} \right| = \int f(t) dt$$

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \left. \begin{array}{l} \cos x = t \\ (x = \arccos t) \end{array} \right| = \int f(t) (-dt)$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \cos^3 x dx \quad (3) \quad \int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx \quad (2) \quad \int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx \quad (1)$$

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx \quad (6) \quad \int \sin^4 x \cos^5 x dx \quad (5) \quad \int \sin^3 2x dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx \quad (9) \quad \int \tan^5 x dx \quad (8) \quad \int \cos^5 x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx \quad (12) \quad \int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx \quad (11) \quad \int \frac{dx}{\sin x} \quad (10)$$

אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת הצבה טריגונומטרית)
זכור:

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \left. \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ (x = 2 \arctan t) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

(3) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx \quad (3) \quad \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (2) \quad \int \frac{1}{1 + \sin x} \quad (1)$$

אינטגרלים עם שורשים (בעזרת הצבה טריגונומטרית)

$$\int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = a \sin t \\ (t = \arcsin \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt)$$

$$\int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = a \tan t \\ (t = \arctan \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right)$$

$$\int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos \frac{a}{x}) \end{array} \right| = \int f(a \tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right)$$

(4) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \sqrt{4x^2 - 1} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} \quad (1)$$

$$\int \sqrt{x^2 + 2x - 3} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^{3/2}} \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{(4 + x^2)^2} \quad (8)$$

$$\int \sqrt{-6x - x^2} dx \quad (7)$$

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 14 - האינטגרל המסוים

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \quad (3) \quad \int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2) \quad \int_1^4 (x^2-4x+1) dx \quad (1)$$

$$\int_0^\pi \cos^2 10x dx \quad (6) \quad \int_1^4 \frac{1}{x^2+4x+1} dx \quad (5) \quad \int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4+|x-1|} dx \quad (8) \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{כאשר} \quad \int_0^4 f(x) dx \quad (7)$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x}} dx \quad (2) \quad \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad (1)$$

(3) נתונה פונקציה רציפה f . הוכח :

$$\text{א. אם } f \text{ זוגית אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\text{ב. אם } f \text{ אי-זוגית אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

(4) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_{-4}^4 \frac{\sin x + 1}{x^2 + 1} dx \quad (2) \quad \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{x^3 + x^5} dx \quad (1)$$

(5) הוכח את אי השוויונים הבאים :

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4 \quad (3) \quad 6 \leq \int_{-4}^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq 6\sqrt{17} \quad (2) \quad \frac{2}{41} \leq \int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4} \leq 4 \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{14} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+4\sin^2 x} \leq \frac{\pi}{6} \quad (6) \quad 0.9 \leq \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \leq 1 \quad (5) \quad \frac{1}{2} e^{-10} < \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{x+10} dx < 1 \quad (4)$$

$$\int_0^\pi x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right) dx \leq \frac{\pi^4}{6} \quad (9) \quad -\frac{1}{2} \leq \int_0^1 x \cdot \sin\left(\frac{\ln x}{x+1}\right) dx \leq \frac{1}{2} \quad (8) \quad \frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7} \quad (7)$$

(6) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4}{n^3} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n}}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n^2}{n^2+n^2} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right\} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{n^{3/2}} \right\} \quad (6)$$

(7) חשב את האינטגרלים הבאים על פי ההגדרה (של רימן) :

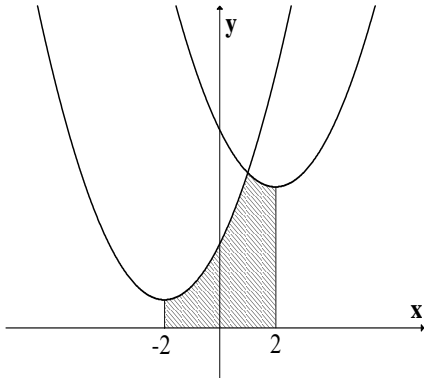
$$\int_0^{\pi} \sin x dx \quad (1) \quad \int_0^1 x^3 dx \quad (3) \quad \int_0^1 x^2 dx \quad (2) \quad \int_0^1 x dx \quad (1)$$

* תוכל להיעזר בזהויות הבאות :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n &= 0.5n(n+1) \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\ \sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha &= \frac{\sin \frac{n}{2}\alpha \sin \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

פרק 15 - שימושי אינטגרל המסוים (שטח ואורך קשת)

חישוב שטחים



(1) נתונות שתי פונקציות:

$$f(x) = x^2 + 4x + 6$$

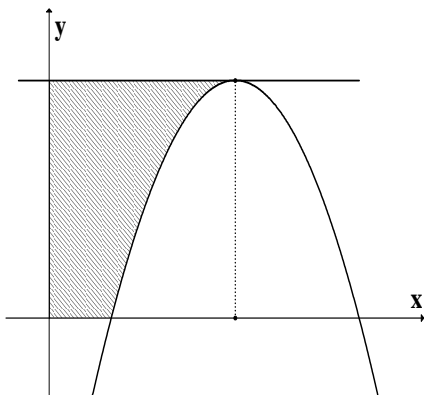
$$g(x) = x^2 - 4x + 14$$

א. מצא את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי

הפונקציות, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים

$$x = -2 \text{ ו- } x = 2 \text{ (השטח המקווקו בציור).}$$



(2) נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 6x - 5$ (ראה ציור).

א. מצא את השיעורים של נקודת המקסימום של

הפונקציה.

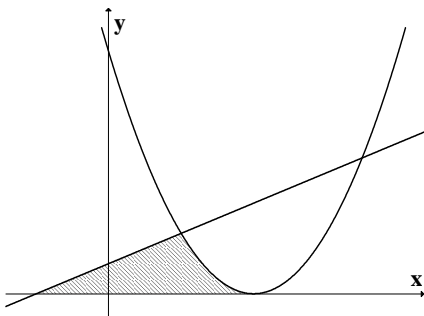
ב. מהי משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה

בנקודת המקסימום שלה?

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי המשיק

בנקודת המקסימום, על ידי הצירים ועל ידי

גרף הפונקציה (השטח המקווקו בציור).



(3) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-2)^2$ ונתון הישר

$$y = 0.5x + 0.5 \text{ (ראה ציור). מצא את השטח}$$

המוגבל על ידי גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x

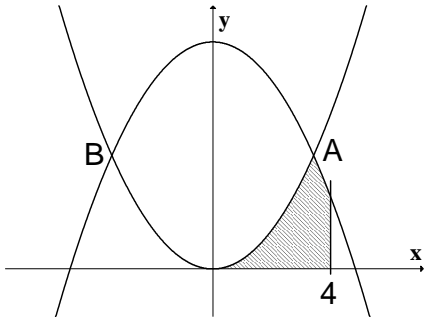
(השטח המקווקו בציור).

(4) נתונות הפונקציות :

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = -x^2 + 18$$

הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודות A ו-B (ראה ציור).



א. מצא את שיעורי ה-x של הנקודות A ו-B.
ב. חשב את השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי

הגרפים של שתי הפונקציות, על ידי ציר ה-x ועל

ידי הישר $x = 4$.

(5) נתונות שתי פונקציות :

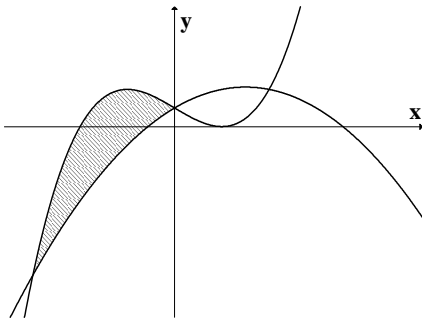
$$y = -x^2 + 3x + 2$$

$$y = x^3 - 3x + 2$$

א. מצא את שיעורי ה-x של נקודות החיתוך בין הגרפים של שתי הפונקציות.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי

הפונקציות, השטח המקווקו בציור.

(6) נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2 + ax$.

הפונקציה עוברת דרך הנקודה $A(2,8)$ (ראה ציור).

א. מצא את ערך הפרמטר a.

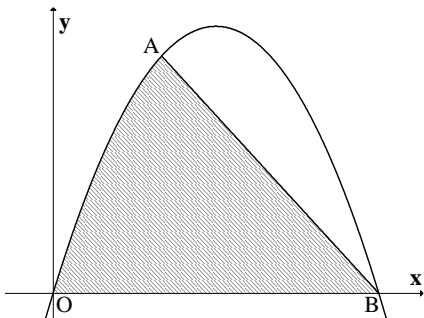
ב. הפונקציה חותכת את ציר x בנקודה $O(0,0)$

ובנקודה B. מצא את שיעורי הנקודה B.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף

הפונקציה, על ידי המיתר AB ועל ידי ציר

ה-x.

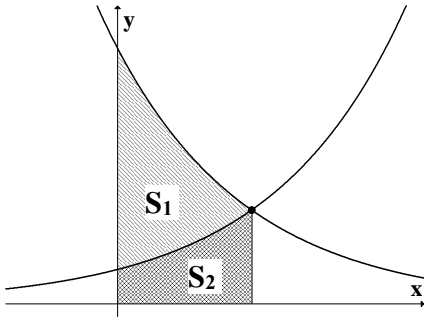


(7)

בציור שלפניך נתונות שתי הפונקציות :

$$f(x) = e^{-x+2}$$

$$g(x) = e^x$$



א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות עם ציר y .

ב. מצא את נקודת החיתוך בין הפונקציות.

ג. חשב את היחס $\frac{S_1}{S_2}$ (ראה ציור).

(8)

נתונה הפונקציה $f(x) = e^{-2x}$.

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה

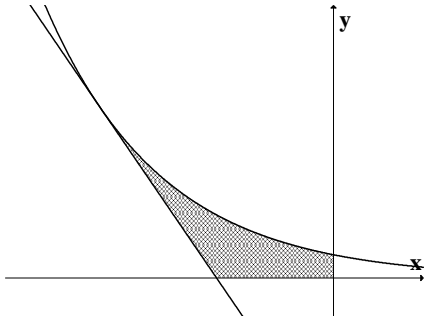
$$x = -1 \text{ (ראה ציור).}$$

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי הצירים (השטח

המקווקו בציור).



(9)

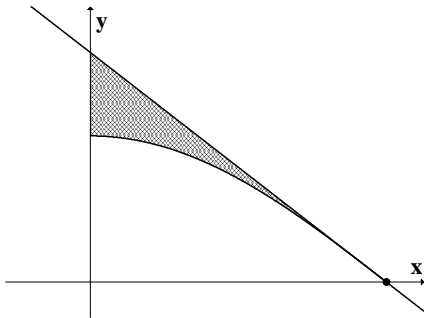
נתונה הפונקציה $y = \cos 2x$ בתחום $0 \leq x \leq 4$ (ראה ציור).

ישר משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .

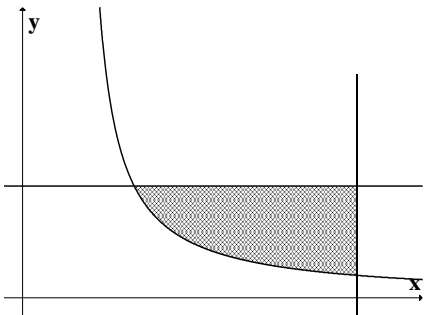


(10)

חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה

$$y = \frac{1}{2x-1} \text{ ועל ידי הישרים } x=3 \text{ ו- } y=1$$

(השטח המקווקו בציור).

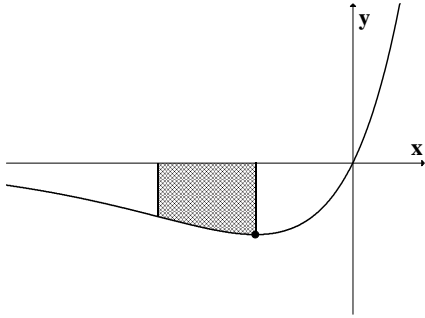


לפתרון מלא בסרטון ודאו היכנסו ל-

כתב ופתר - גיא סלומון ☺

(11) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x} - e^x$.

לפונקציה יש מינימום כמתואר בציור.



א. מצא את שיעור ה- x של נקודת המינימום של הפונקציה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה העבירו אנך לציר ה- x . נתון כי השטח, המוגבל על ידי גרף

הפונקציה, על ידי ציר ה- x , על ידי האנך ועל

ידי הישר $x=a$, שווה ל- $3e^{2a} - e^a$, כאשר

$a < \ln 0.5$. מצא את הערך של a .

(12)

נתונה הפונקציה $f(x) = e^{\frac{x+1}{2}}$ (ראה ציור).

שיפוע הישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A , הוא $\frac{e^2}{2}$.

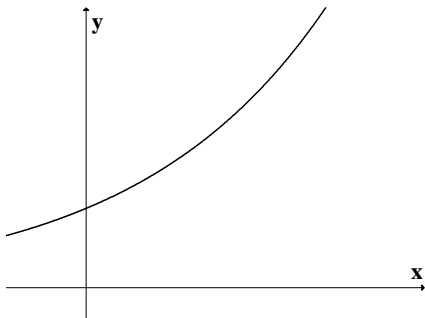
א. מצא את שיעורי הנקודה A .

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה

בנקודה A .

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .



(13)

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{8}{x} - 2$ בתחום $x > 0$.

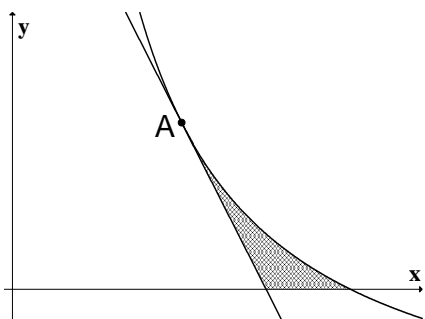
מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה

$A(2,2)$ (ראה ציור).

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- x (השטח המקוקו בציור).



(14) נתונות הפונקציות :

$$f(x) = \sin x ; 0 \leq x \leq \pi$$

$$g(x) = \cos 2x ; 0 \leq x \leq \pi$$

א. תאר במערכת צירים את הגרפים של שתי הפונקציות הנתונות.

ב. קווקוו את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות הנתונות וחשב את גודלו.

(15) נתונה הפונקציה $f(x) = tg^2 x$ בתחום $-\frac{\pi}{2} < x \leq 0$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -\frac{\pi}{4}$.ב. הראה כי $\int tg^2 x dx = tgx - x + c$ ומצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- x .

(16) דרך הנקודה $A(8,0)$ העבירו משיקים לפרבולה $y = x^2 - 10x + 25$.

א. מצא את משוואות המשיקים.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני המשיקים והפרבולה.

(17)

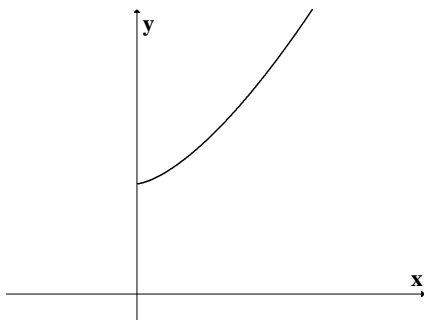
נתונה הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + 4$ בתחום $x \geq 0$.

(ראה ציור)

א. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה

 $(0,0)$ ומשיק לגרף הפונקציה הנתונה.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה

הנתונה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .

(18) א. חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \cos^3 x$.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי ציר ה- x ועל ידי גרף הפונקציה $y = \cos^2 x \cdot \sin x$

$$\text{בתחום } \frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$$

* לסטודנטים במקצועות ריאליים, ענו על סעיף ב ללא סעיף א.

(19) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2 = -x$ והישר $y = x + 6$.

(20) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $x = y^2 + 2$ והישר $y = x - 8$.

(21) חשב את האינטגרלים הבאים: א. $\int_0^a \sqrt{x^2 - a^2} dx$. ב. $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy$

חישוב אורך עקום (קשת)

(22) חשב את אורך העקום הנתון בסעיפים הבאים:

$$(1 \leq x \leq 2) y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3} \quad (3) \quad (1 \leq x \leq 8) y = x^{2/3} \quad (2) \quad (1 \leq x \leq 2) y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \quad (1)$$

$$(1 \leq x \leq 8) x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad (6) \quad (0 \leq x \leq 3) y = \frac{1}{3} \sqrt{x}(3-x) \quad (5) \quad (0 \leq x \leq 3) y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \quad (4)$$

$$(1 \leq x \leq 2) y = x^2 \quad (9) \quad (1 \leq x \leq 2) y = \ln x \quad (8) \quad (0 \leq y \leq 4) x = 3y^{3/2} - 1 \quad (7)$$

פרק 16 - אינטגרלים לא אמיתיים (מוכללים)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_1^{\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} \quad (1) \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (2) \quad \int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} \quad (3) \quad \int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2} \quad (5) \quad \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+5} \quad (6) \quad \int_1^{\infty} x^2 e^{-2x} dx \quad (7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} \quad (8)$$

(2) בדוק את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים :

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^4+4x^2+5} dx \quad (1) \quad \int_1^{\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^3+4x^2+5} dx \quad (2) \quad \int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^4} dx \quad (3) \quad \int_3^{\infty} \frac{\sin x \cdot \ln x}{x^2\sqrt{x^2-4}} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} (\sqrt{x^2+1}-x) dx \quad (5) \quad \int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x^3+1}}{x} dx \quad (6) \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx \quad (7) \quad \int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1+x^2} dx \quad (8)$$

(3) חשב את השטח בין גרף הפונקציה $y = e^{2x}$, הישר $x=1$ וציר x עבור $x \leq 1$.

(4) חשב את השטח בין גרף הפונקציה $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ציר ה- y , ציר ה- x והישר $x=5$.

פרק 17 - נגזרות חלקיות, דיפרנציאביליות

(1) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2)$$

$$(only f_x) f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = \sin(xy) \quad (6)$$

$$f(x, y) = \arctan(2x + 3y) \quad (7)$$

$$f(r, \theta) = r \cos \theta \quad (8)$$

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 \quad (9)$$

$$f(u, v, t) = e^{uv} \sin ut \quad (10)$$

(2) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sin(10x + 4y) \quad (3)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (4)$$

(3) (1) חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0,0)$.

(2) האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$?

(3) האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

(4) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציה משאלה (3) בנקודה $(0,0)$

(5) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציות הבאות בנקודה $(0,0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{2x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases} \quad (2)$$

(6) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציה הבאה בתחום הגדרתה

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

הצרת סימון:

	$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1$	$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$
$f = f(x, y) \Rightarrow$	$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11}$	$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}$
	$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12}$	$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}$

פתרונות

$$f_y = -6x^2y + 3 \quad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1) \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \quad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \quad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \quad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_y = \cos(xy) \cdot x \quad f_x = \cos(xy) \cdot y \quad (6)$$

$$f_y = \frac{3}{1 + (2x + 3y)^2} \quad f_x = \frac{2}{1 + (2x + 3y)^2} \quad (7)$$

$$f_\theta = -r \sin \theta \quad f_r = \cos \theta \quad (8)$$

$$f_y = 2xyz^3 \quad f_x = y^2z^3 \quad (9)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \quad f_v = u \cdot e^{uv} \cdot \sin ut \quad f_u = e^{uv} [v \sin ut + t \cos ut] \quad (10)$$

$$f_{xx} = 8 - 2y^2 \quad f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (1) \quad (2)$$

$$f_{yy} = -2x^2 \quad f_y = -2x^2y + 10$$

$$f_{yx} = -4xy \quad f_{xy} = -4xy$$

$$f_{xx} = 12x^2 \ln y \quad f_x = 4x^3 \ln y \quad (2)$$

$$f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2} \quad f_y = \frac{x^4}{y}$$

$$f_{yx} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{xy} = \frac{4x^3}{y}$$

$$f_{xx} = -100 \sin(10x + 4y) \quad f_x = 10 \cos(10x + 4y) \quad (3)$$

$$f_{yy} = -16 \sin(10x + 4y) \quad f_y = 4 \cos(10x + 4y)$$

$$f_{yx} = -40 \sin(10x + 4y) \quad f_{xy} = -40 \sin(10x + 4y)$$

$$f_{xz} = y \quad f_{xy} = z \quad f_{xx} = 0 \quad f_x = yz \quad (4)$$

$$f_{yz} = x \quad f_{yy} = 0 \quad f_{yx} = z \quad f_y = xz$$

$$f_{zz} = 0 \quad f_{zy} = x \quad f_{zx} = y \quad f_z = xy$$

(1) (3) הנגזרות החלקיות בנקודה (0,0) שוות אפס.

(2) הפונקציה לא רציפה בנקודה (0,0).

(3) פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

(4) לא דיפרנציאבילית.

(5) לא דיפרנציאבילית (2) דיפרנציאבילית.

(6) דיפרנציאבילית.

פרק 18 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט

* מומלץ בחום לעיין בנספח הוקטורים שבעמוד 71.

$$(1) \text{ תהי } f(x, y) = x^2 + y^2$$

א. חשב את הגרדיאנט של f ואת אורכו בנקודה $(3, 4)$. מהי משמעות התוצאה?

ב. הראה שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של f העובר דרך $(3, 4)$.

$$(2) \text{ תהי } f(x, y) = 3x^2y$$

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$ בכיוון הוקטור $\vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

$$(3) \text{ תהי } f(x, y) = x - \sin(xy)$$

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, \pi/2)$ בכיוון הוקטור $\vec{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

$$(4) \text{ תהי } f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$$

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$ בכיוון וקטור היחידה, היוצר

זווית של 45° עם החלק החיובי של ציר x .

$$(5) \text{ תהי } f(x, y) = xy^2$$

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 3)$ בכיוון לנקודה $(4, 5)$.

$$(6) \text{ תהי } f(x, y, z) = x^2y^2z$$

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(2, 1, 4)$ בכיוון הוקטור

$$\vec{u} = 1\cdot\mathbf{i} + 2\cdot\mathbf{j} + 2\cdot\mathbf{k}$$

(7) אם הפוטנציאל החשמלי V בנקודה (x, y) נתון על ידי $V = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, מצא

את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3, 4)$ בכיוון הנקודה $(2, 6)$.

(8) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x, y) = e^x(\cos y + \sin y)$

בנקודה $(0, 0)$ היא מקסימלית וחשב את ערכה.

(9) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x, y, z) = 2x^3y - 3y^2z$

בנקודה $(1, 2, -1)$ היא מקסימלית וחשב את ערכה.

(10) אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x, y, z) = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2$ ואתה נמצא

בנקודה $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$ ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר, באיזה כיוון עליך

ללכת?

הערות סימון

א. במישור R^2 : $\mathbf{i} = (1, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1)$

ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים: $\vec{u} = (x, y)$ או $\vec{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

למשל, $\vec{u} = (3, 4) \Leftrightarrow \vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

במרחב R^3 : $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$

ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים: $\vec{v} = (x, y, z)$ או $\vec{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

למשל, $\vec{u} = (3, 4, 5) \Leftrightarrow \vec{u} = 3\cdot\mathbf{i} + 4\cdot\mathbf{j} + 5\cdot\mathbf{k}$

ב. יש המסמנים וקטור \vec{u} גם כך \underline{u} או כך \mathbf{u} .

ג. וקטור יחידה יסומן $\hat{\mathbf{u}}$.

פתרונות

(1) א. הגרדיאנט (6,8). אורך הגרדיאנט 10.

(2) $\frac{48}{5}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $7.5\sqrt{2}$ (5) $3\sqrt{13}$ (6) $\frac{88}{3}$

(7) $\frac{1}{5}\sqrt{5}$ (8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הוקטור (1,1) ושווה ל- $\sqrt{2}$

(9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הוקטור (12,14,-12) ושווה ל-22.

(10) בכיוון הוקטור (-2,2,-2).

פרק 19 - פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות, שימושים

גיאומטריים

פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות

- (1) מצא את y' כאשר $x^2 + y^5 = xy + 1$. חשב את $y'(0)$.
- (2) מצא את $y'(1)$ כאשר $e^{xy} + x^2y^2 = 5x - 4$.
- (3) מצא את $y'(e)$, $y''(e)$ כאשר $2\ln x + \ln y = 1$.
- (4) נתון $(z = z(x, y) \geq 0)$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = 0$.
חשב את: $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$.
- (5) נתון $(y = y(x, z) \geq 0)$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = -e^4$.
חשב את $y_x(0,0)$, $y_z(0,0)$.
- (6) נתון $(z = z(x, y) \geq 0)$ $z^3 - 2xz + y = 0$. מצא $z_{xx}(1,1)$.
- (7) נתונה משוואה $z^3 - 3xyz = 4$ ונקודה $(2, 1, -2)$.
- מצא: (1) $z_{xx}(2,1)$ (2) $z_{xy}(2,1)$ (3) $z_{yy}(2,1)$.
- (8) אם $u^2 - v = 3x + y$ ו- $u - 2v^2 = x - 2y$, מצא את u_x, v_x, u_y, v_y .
- (9) אם $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $w = u^3 + v^3$, מצא את w_x, w_y .

שימושים גיאומטריים (מישור משיק וישר נורמלי למשטח)

$$(10) \text{ נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה } \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3 \text{ (} z < 0 \text{)}$$

מהי משוואת מישור משיק למשטח בנקודה P בה $x = -2, y = 1$.

$$(11) \text{ מצא משוואה של מישור משיק למשטח } xyz = 8 \text{ בנקודה } (-2, 2, -2) \text{ וכן משוואה של הישר הפרמטרי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.}$$

$$(12) \text{ מצא מישור המשיק למשטח } x^2 + 8y^2 = 21 - 27z^2 \text{ המקביל למישור } x + 8y + 18z = 0$$

$$(13) \text{ למשטח } \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} \text{ מעבירים מישור המשיק בנקודה כלשהי.}$$

מישור זה חותך את הצירים x, y, z בנקודות A, B, C בהתאמה. נסמן

$$O = (0, 0, 0) \text{ . הוכח } OA + OB + OC = a$$

(למעשה מוכיחים שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודת ההשקה) .

פתרונות

$$y'(0) = \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$y'(1) = 5 \quad (2)$$

$$y'(e) = -\frac{2}{e^2}, y''(e) = \frac{6}{e^3} \quad (3)$$

$$z_x(0,0) = z_y(0,0) = -\frac{\sin 1}{2} \quad (4)$$

$$y_x(0,0) = 0, y_z(0,0) = \frac{1}{2e^4} \quad (5)$$

$$z_x(1,1) = -16 \quad (6)$$

$$z_{xx}(2,1) = z_{xy}(2,1) = 1, z_{yy}(2,1) = 4 \quad (7)$$

$$u_x = \frac{1-12v}{1-8uv}, u_y = \frac{-4v-2}{1-8uv}, v_x = \frac{2u-3}{1-8uv}, v_y = \frac{-4u-1}{1-8uv} \quad (8)$$

$$w_x = -3uv, w_y = 1.5(u+v) \quad (9)$$

$$3x - 6y + 2z + 18 = 0 \quad (10)$$

$$x - y + z + 6 = 0, (-2, 2, -2) + t(1, -1, 1) \quad (11)$$

$$x + 8y + 18z = 21, x + 8y + 18z = -21 \quad (12)$$

פרק 20 - קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום, מינימום או אוקף.

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

$$(9) \text{ נתון משטח } z = x^3 + y^3 - 3xy + 4.$$

מצא את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$ וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

(12) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין. עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8.

מנהל השיווק עומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ ואת הביקוש Q_2 למחשבון בסין על ידי:

$$Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$$

$$Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$$

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, P_1 ו- P_2 , על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

פתרונות

- (1) $(-0.5, 1)$ אוקף ; $(1.5, -3)$ מינימום.
- (2) $(1, 2)$ מינימום ; $(-1, -2)$ מקסימום ; $(-1, 2)$, $(1, -2)$ אוקף.
- (3) $(0, 0)$ אוקף ; $(1, 1)$ מינימום.
- (4) $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ מינימום ; $(1, 0)$ מקסימום ; $(-1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$ אוקף.
- (5) $(0, 2)$ מקסימום. (6) $(4, 4)$ מקסימום.
- (7) $(-0.5, 4)$ מקסימום. (8) אין נקודות קריטיות.
- (9) $z = 3$, $z = 4$. (10) רווח 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ .
- (11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.
- (12) $P_1=10\$$, $P_2=12\$$, רווח מקסימלי $288\$$.

פרק 21 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')

פונקציות של שני משתנים

מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות הבאות בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 ; 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2 ; x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y ; x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y ; x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$\text{Max}\{xy\} \quad \text{s.t.} \quad x + 3y = 12 \quad (5)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעייה.

$$\text{Max}\{2x + y\} \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \quad (6)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעייה.

(7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x + 3y = 12$, מצא את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

(8) מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$ מצא את הנקודות שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

(9) מצא את המרחק הקצר ביותר מהישר $3x - 6y + 4 = 0$ לפרבולה $x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$.

רמז: מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $ax + by + c = 0$ הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

(10) מוیشלה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = \ln x + \ln y \quad (x, y)$$

נתונה על ידי מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מוישלה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$ והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוישלה.

(11) דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = xy \quad (x, y)$$

נתונה על ידי מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.

לדני תקציב של 12 ש"ח. נסח ופתור את בעיית דני.

(12) עקומת התמורה בין מנגו X ואננס Y היא $x^2 + y^2 = 13$.

$$f(x, y) = 4x + 6y \text{ לדני תועלת}$$

דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) , על עקומת התמורה, המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסה ופתור את הבעיה.

(13) לייצרון פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$. המחירים ליחידת K ו-L הם $P_K = 2$, $P_L = 1$. היצרון נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף (K^*, L^*) המביא למינימום את העלות. נסה את בעיית היצרון (אל תפתור).

פתרונות

$$\begin{array}{llll} \text{Max}(0, \pm 1) & \min(\pm 1, 0) & (2) & \text{Max}(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad (1) \\ \text{Max}(\pm 2, 1) & \min(\pm 2, 1) & (4) & \text{Max}(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad (3) \\ & \text{Max}(9, 36) & (6) & \text{Max}(6, 2) \quad (5) \\ \text{Max}(\pm 1, \mp 1) & \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) & (8) & (6, 2) \quad (7) \\ & \min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) & (10) & 7 / \sqrt{45} \quad (9) \\ & \text{Max}(2, 3) & (12) & \text{Max}(6, 2) \quad (11) \\ & & & \min\{2K + L\} \quad ; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad (13) \end{array}$$

פרק 22 - קיצון תחת אילוצים של פונקציה של שלושה משתנים (כופלי

לגרנג')

פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוץ

(1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(2) מצא על פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה $(1, 2, 2)$ ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה $(1, 2, 2)$.

(3) א. מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$.
 ב. מצא נק' על המישור $-2x - 2y + z = 0$ שהיא הקרובה ביותר לנק' $(1, 2, 3)$.
 ג. בדוק תשובתך ע"י חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.

(4) מצא את הנקודות על המשטח $z^2 = xy + 1$ הקרובות ביותר לראשית.

(5) מצא את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ למישור $3x + 4y + 12z = 288$.

רמז: מרחק הנקודה (x_0, y_0, z_0) מהמישור $ax + by + cz + d = 0$ הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוצים

(6) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל $x^2 + y^2 = 1$ והמישור $z = x + y$ לבין ראשית הצירים.

(7) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$ והמישור $z = x + y$ לבין ראשית הצירים.

הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פיסיקליים או גיאומטריים היות ומדובר בבעיות מעשיות. ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

פתרונות

- (1) רוחב 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ .
- (2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה (2, 4, 4) .
- הנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה (-2, -4, -4) .
- (3) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3})$.
- (4) (0, 0, 1) , (0, 0, -1)
- (5) מרחק קצר ביותר $\frac{256}{13}$. מרחק ארוך ביותר $\frac{320}{13}$.
- (6) מרחק מינימלי 1 . מרחק מקסימלי $\sqrt{3}$.
- (7) מרחק מינימלי $\frac{75}{17}$. מרחק מקסימלי 10 .

פרק 23 - קיצון מוחלט של פונקציה רציפה בקבוצה סגורה וחסומה

- (1) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת משולש שקודקודיו הם: $(0, 5), (3, 0), (0, 0)$.
- (2) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת ריבוע שקודקודיו הם $(2, 0), (2, 2), (0, 2), (0, 0)$.
- (3) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ בתחום R , כאשר R הוא העיגול $x^2 + y^2 \leq 4$.
- (4) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור, $R = \{(x, y) \mid x + y \geq -3, x \leq 0, y \leq 0\}$.
- (5) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור, $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 3x \geq -y\}$.

פתרונות

- (1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט -11.
- (2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט -1.
- (3) מקסימום מוחלט $\frac{33}{4}$. מינימום מוחלט $-\frac{1}{4}$.
- (4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט -1.
- (5) מקסימום מוחלט $1 + 6\sqrt{10}$. מינימום מוחלט $1 - 6\sqrt{10}$.

פרק 24 – חוקי חזקות ומשוואות מעריכיות ולוגריתמיות:

חוקי חזקות:

סיכום חוקי החזקות:

$$\begin{array}{lll}
 a^n \cdot a^m = a^{n+m} & .3 & a^1 = a & .2 & a^0 = 1 & .1 \\
 a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m & .6 & (a^n)^m = a^{n \cdot m} & .5 & \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} & .4 \\
 \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m & .9 & a^{-m} = \frac{1}{a^m} & .8 & \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m & .7
 \end{array}$$

סיכום חוקי השורשים:

$$\begin{array}{lll}
 \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} & .3 & \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}} & .2 & \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} & .1 \\
 \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} & .6 & \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} & .5 & \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b} & .4
 \end{array}$$

שאלות יסודיות – חוקי חזקות ושורשים:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{ll}
 \frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81} & .ב. \\
 2^3 + 2^5 & .ד. \\
 \frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5} & .א. \\
 \frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5} & .ג.
 \end{array}$$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{ll}
 \frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}} & .ב. \\
 \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}} & .ד. \\
 \frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4} & .א. \\
 \frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}} & .ג.
 \end{array}$$

(3) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$

(4) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים:

$$\begin{array}{lll}
 \frac{\sqrt{36}}{2} & .ג. & 5\sqrt{3} & .ב. & 3\sqrt{2} & .א. \\
 x\sqrt{x} & .ה. & 2\sqrt[3]{3} & .ד. & &
 \end{array}$$

5) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר:

ג. $\sqrt{63}$

ב. $\sqrt{48}$

א. $\sqrt{12}$

ה. $\sqrt{x^5}$

ד. $\sqrt[3]{54}$

משוואות מעריכיות:

1. פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה: $a^x = a^y$ הוא: $x = y$.
2. פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = 1$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = 1 = a^0$.
3. פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = b^x$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = b^x = 1$ ללא תלות בבסיסים.

שאלות יסודיות – משוואות מעריכיות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(25 \cdot 0.2^{2x})^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x} \quad (8)$$

$$2^{2x} = 32 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^x \quad (7)$$

$$3^{5x-3} = 3^{3x+7} \quad (6)$$

$$3^x = 5^x \quad (11)$$

$$\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3} \quad (10)$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x} \quad (9)$$

$$2^x + 2^x = 16 \quad (14)$$

$$e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x} \quad (13)$$

$$5^{3-x} = \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^{2x/3-2} \quad (12)$$

$$2 \cdot 6^x + 6^{x+2} = 227 \quad (17)$$

$$5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162 \quad (16)$$

$$e^x + 2e^x = 3e^4 \quad (15)$$

$$2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \quad (20)$$

$$e^2 \cdot e^x - e^{x+1} = e - 1 \quad (19)$$

$$5^{-x} + 25^{\frac{1-x}{2}} - 5^{-x-1} = 145 \quad (18)$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} = -\frac{2}{3} \quad (23)$$

$$6^x - 4 \cdot 6^x + 3 = 0 \quad (22)$$

$$5 \cdot 25^x - 26 \cdot 5^x + 5 = 0 \quad (21)$$

$$e^{1+x} + e^{1-x} = e^2 + 1 \quad (26)$$

$$e^{2x} + e^x - 2 = 0 \quad (25)$$

$$\frac{20}{9^x+1} = 3 - \frac{8}{9^x-1} \quad (24)$$

תשובות סופיות:

- 1) א. 2. ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. 40. 2) א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. k. ג. $\frac{1}{5}$ ד. $\frac{1}{x} + x$ 3) $\frac{1}{2}$
- 4) א. $\sqrt{18}$ ב. $\sqrt{75}$ ג. $\sqrt{9}$ ד. $\sqrt[3]{24}$ ה. $\sqrt{x^3}$
- 5) א. $2\sqrt{3}$ ב. $4\sqrt{3}$ ג. $3\sqrt{7}$ ד. $3\sqrt[3]{2}$ ה. $x^2\sqrt{x}$ 6) $x=5$ 7) $x=1$
- 8) $x=1$ 9) $x=-2$ 10) $x=-\frac{1}{2}$ 11) $x=0$ 12) $x=3$ 13) $x=1, \frac{1}{6}$ 14) $x=3$
- 15) $x=4$ 16) $x=4$ 17) $x=1$ 18) $x=-2$ 19) $x=-1$ 20) $x=1, 2$

$$(21) \ x = \pm 1 \quad (22) \ x = 0 \quad (23) \ x = 0, 1 \quad (24) \ x = 1, -\frac{1}{2} \quad (25) \ x = 0 \quad (26) \ x = \pm 1$$

משוואות לוגריתמיות:

1. הגדרת הלוגריתם: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ כאשר: $a, b > 0, a \neq 1$.
 לוגריתם על בסיס a של b מוגדר כחזקה שיש להעלות את a על מנת שיהיה שווה ל- b . ערך חזקה זו הוא x . ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס.
 נפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

2. דוגמאות כלליות:

$$\bullet \quad 2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$$

$$\bullet \quad 3^4 = 81 \Leftrightarrow \log_3 81 = 4$$

$$\bullet \quad 10^2 = 100 \Leftrightarrow \log_{10} 100 = 2$$

$$\bullet \quad \sqrt{16} = 4 \Leftrightarrow \log_{16} 4 = 0.5$$

$$\bullet \quad 5^{-2} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow \log_5 \frac{1}{25} = -2$$

$$\bullet \quad 6^0 = 1 \Leftrightarrow \log_6 1 = 0$$

3. חוקי יסוד בלוגריתמים:

$$\text{א. } \log_a a = 1 \quad \text{ב. } \log_a 1 = 0$$

4. חוקי הלוגריתמים:

$$\text{א. מכפלה לסכום: } \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\text{ב. מנה להפרש: } \log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\text{ג. מקדם למעריך: } \log_a b^n = n \log_a b$$

$$5. \text{ חזקה לוגריתמית: } a^{\log_a x} = x$$

$$6. \text{ מעבר מבסיס לבסיס: } \log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a} \text{ , כאשר: } a, m > 0 ; a, m \neq 1 ; b > 0$$

$$7. \text{ לוגריתם על בסיס } e \text{ נקרא הלוגריתם הטבעי ומסומן: } \log_e x = \ln x$$

שאלות יסודיות – חוקי הלוגריתמים ומשוואות לוגריתמיות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

לפתרון מלא בסרטון ודאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

א. $\log_2 32$ ב. $\log 1000$ ג. $\log_{25} 5$
 ד. $\log_8 4$ ה. $\log_4 \frac{1}{16}$ ו. $\log_a a^4$
 ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

(2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

א. $\ln e^2$ ב. $\ln \frac{1}{e^4}$ ג. $\ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$

(3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_{36} 6 = x$ ב. $\log_2 x = 16$
 ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$ ד. $\log_x 64 = 3$
 ה. $\log_x 25 = 2$ ו. $\log_x (3x+4) = 2$
 ז. $\ln x = 2$ ח. $\ln x = -\frac{1}{2}$

(4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\log_6 8 + \log_6 9 - \log_6 2$ ב. $2\log 2 + \log 25$
 ג. $\frac{\log_3 2 + \log_3 4}{3\log_3 6 - (2 + \log_3 12)}$

(5) נתון: $\log_3 2 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 16$ ב. $\log_3 6$ ג. $\log_3 24$ ד. $\log_3 1.5$

(6) נתון: $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 45$ ב. $\log_2 60$ ג. $\log_2 \sqrt{7.5}$

(7) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $6^{\log_6 8}$ ב. $4^{\log_2 5}$ ג. $e^{\ln 3}$ ד. $e^{2\ln 3}$

(8) נתון: $\log_3 5 = b$, $\log_2 3 = a$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 50$ ב. $\log_2 \sqrt{30}$ ג. $\log_5 22.5$

(9) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

א. $\log_x (x^2 + 6x) = 3$ ב. $\log_3 (\log_x (x^2 + 6x)) = 1$

$$\log_5(25^x - 20) = x \quad \text{ד.} \qquad \log_5(\log_2(x^2 - 7)) = 0 \quad \text{ג.}$$

10 פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בחוקי הלוגריתמים):

$$\log_5(4x - 3) = \log_5 7 \quad \text{ב.} \qquad \ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 = x \quad \text{א.}$$

$$2\log_2(2x - 2) - \log_2(16 - x) = \log_2(x - 1) + 1 \quad \text{ג.}$$

11 פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבת t וקבלת משוואה ריבועית):

$$3\ln^2 x + \ln x = 2 \quad \text{ב.} \qquad \log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0 \quad \text{א.}$$

$$\log x \cdot \log_x(10x) = 2 \quad \text{ד.} \qquad \log_4 x + \log_x 4 = 2.5 \quad \text{ג.}$$

$$\ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln(ex^2) \quad \text{ה.}$$

12 פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה):

$$x^{\log_5 x} = \frac{25}{x} \quad \text{ב.} \qquad x^{\log_3 x} = 81 \quad \text{א.}$$

$$x^{\frac{\log_2 x - 6}{4}} = \frac{4}{x} \quad \text{ד.} \qquad x^{\ln x} = e^6 x \quad \text{ג.}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x} \quad \text{ו.} \qquad \frac{\log_{5-x}(x+1)}{\log_{5-x}(x-1)} - 1 = \frac{1}{\log_{5-x}(x-1)} \quad \text{ה.}$$

13 פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (בסיסים שונים):

$$e^x = 2 \quad \text{ג.} \qquad 5^x = 8 \quad \text{ב.} \qquad 2^x = 5 \quad \text{א.}$$

$$e^x = -1 \quad \text{ה.} \qquad e^x = \frac{1}{2} \quad \text{ד.}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 5 \quad \text{ב. } 3 \quad \text{ג. } \frac{1}{2} \quad \text{ד. } \frac{2}{3} \quad \text{ה. } -2 \quad \text{ו. } 4 \quad \text{ז. } -1.5 \quad \text{ח. } 2 \quad \text{ט. } -4 \quad \text{י. } -1.5$$

$$(3) \quad \text{א. } x = \frac{1}{2} \quad \text{ב. } x = 65,536 \quad \text{ג. } x = 27 \quad \text{ד. } x = 4 \quad \text{ה. } x = 5 \quad \text{ו. } x = 4 \quad \text{ז. } x = e^2$$

$$\text{א. } x = \frac{1}{\sqrt{e}} \quad \text{ב. } x = 2 \quad \text{ג. } x = 3 \quad \text{ד. } x = 4 \quad \text{ה. } x = a+1 \quad \text{ו. } x = 3a+1 \quad \text{ז. } x = 1-a \quad \text{ח. } x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\text{א. } 2a+b \quad \text{ב. } 2+a+b \quad \text{ג. } \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2} \quad \text{ד. } 8 \quad \text{ה. } 25 \quad \text{ו. } 3 \quad \text{ז. } 9$$

$$\text{א. } 2b + \frac{1}{a} \quad \text{ב. } \frac{1}{2} + \frac{a}{2} + \frac{ab}{2} \quad \text{ג. } \frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$$

$$\text{א. } x=3 \quad \text{ב. } x=3 \quad \text{ג. } x=\pm 3 \quad \text{ד. } x=1$$

$$\text{א. } x=0 \quad \text{ב. } x=2.5 \quad \text{ג. } x=6$$

$$\text{א. } x=4, \frac{1}{2} \quad \text{ב. } x = \sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{e} \quad \text{ג. } x=16, 2 \quad \text{ד. } x = \frac{1}{100}, 10 \quad \text{ה. } x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e}$$

$$\text{א. } x=9, \frac{1}{9} \quad \text{ב. } x = \frac{1}{25}, 5 \quad \text{ג. } x = e^3, \frac{1}{e^2} \quad \text{ד. } x = 16, \frac{1}{4} \quad \text{ה. } x=3 \quad \text{ו. } x = \sqrt{e}, e$$

$$\text{א. } x=2.322 \quad \text{ב. } x=1.292 \quad \text{ג. } x=0.693 \quad \text{ד. } x=-0.693 \quad \text{ה. } \Phi$$

אי שוויונים מעריכיים:

פתרון אי-השוויון: $a^x > a^y$ הוא: עבור $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.
פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\sqrt{2^x} \leq 4^{x^2-1} \quad (2) \qquad 3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x} \quad (1)$$

$$e^x > 3 \quad (4) \qquad e^{\sqrt{x}+1} > e^{2x} \quad (3)$$

$$25^x + 5 < 6 \cdot 5^x \quad (6) \qquad \left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x} \quad (5)$$

$$e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0 \quad (8) \qquad e^{2x} - 5e^x + 4 > 0 \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$x \leq \frac{1}{8} \quad (5) \quad x > \ln 3 \quad (4) \quad 0 \leq x < 1 \quad (3) \quad x \leq -1 \cup 1 \leq x \leq \frac{1}{4} \quad (2) \quad x < \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$.x = 0 \quad (8) \quad x < 0 \cup \ln 4 < x \quad (7) \quad 0 < x < 1 \quad (6)$$

אי-שוויונים לוגריתמיים:

פתרון אי-השוויון: $\log_a x > \log_a y$ הוא: עבור $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.
פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$\log_6(x^2 - 5x) < 1 \quad (2) \qquad \log_2 x < \log_2(5x - 20) \quad (1)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}}(7 - x) \quad (4) \qquad \log_3 x > \log_9(15 - 2x) \quad (3)$$

$$\ln x < 3 \quad (6) \qquad \ln x \geq \ln(x^2 - 12) \quad (5)$$

$$\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x} \quad (8) \qquad \ln^2 x - 6 \ln x < 7 \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$0 < x < e^3 \quad (6) \quad 2\sqrt{3} < x \leq 4 \quad (5) \quad -3 \leq x < \frac{1}{3} \quad (4) \quad 3 < x < 7 \frac{1}{2} \quad (3) \quad x < 0 \text{ או } x > 5 \quad (2) \quad x > 5 \quad (1)$$

$$.x \neq 1 \text{ וגם } \frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2 \quad (8) \quad \frac{1}{e} < x < e^7 \quad (7)$$

תירגול נוסף:

חזרה על חוקי חזקות ושורשים:

פשט את הביטויים הבאים לפי הכללים: $a^n a^m = a^{n+m}$, $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$a^{12} a^2 a^4 a^3 \quad (3)$$

$$\frac{a^3 a^8}{a^4} \quad (6)$$

$$\frac{a^2 b^3 a^8 b^{12}}{a^7 b^9} \quad (9)$$

$$3^2 3^3 3^4 \quad (12)$$

$$\frac{2^{12} 5^{13} 3^6}{2^9 3^6 5^{12}} \quad (15)$$

$$a^4 a^5 a^9 \quad (2)$$

$$\frac{a^{16}}{a^7} \quad (5)$$

$$\frac{b^{10} b^{12}}{b^2 b^6 b^7} \quad (8)$$

$$2^6 2^2 \quad (11)$$

$$\frac{2^{17} 3^5}{2^{14} 3^4} \quad (14)$$

$$\frac{3^{19} 5^{24} 5^6}{5^{30} 3^{18}} \quad (17)$$

$$a^2 a^6 \quad (1)$$

$$\frac{a^8}{a^3} \quad (4)$$

$$\frac{b^2 b^7 b^3}{b^5 b^4} \quad (7)$$

$$\frac{a^{16} b^4 a^{10} b^8 a^6 b^{12}}{a^3 b^5 a^2 b^2 a^4} \quad (10)$$

$$\frac{3^{16}}{3^{14}} \quad (13)$$

$$\frac{4^6 7^4 7^3}{7^6 4^4 4^3} \quad (16)$$

פשט את הביטויים הבאים לפי הכלל: $(a^n)^m = a^{nm}$

$$(a^3)^3 (a^7)^2 \quad (20)$$

$$\frac{(a^2)^8 (a^4)^6}{(a^6)^2 (a^2)^3} \quad (23)$$

$$\frac{(a^2)^4 (b^6)^5 a^{12}}{a^{23} b^{28}} \quad (26)$$

$$\frac{(2^4)^5 (3^5)^7 2^{20}}{3^{35} 2^{40}} \quad (29)$$

$$(a^6)^4 \quad (19)$$

$$\frac{a^2 (a^8)^2}{a^{14}} \quad (22)$$

$$\frac{(3^5)^3 3^2}{(3^3)^2 3^4} \quad (25)$$

$$\frac{(3^2)^6 5^{31} 3^7}{(5^2)^{10} 5^{11} 3^{18}} \quad (28)$$

$$(a^2)^6 \quad (18)$$

$$\left(\frac{a^{13}}{a^4}\right)^5 \quad (21)$$

$$\frac{(2^3)^4}{2^2 2^9} \quad (24)$$

$$\frac{a^{20} (a^3)^4 (b^5)^6}{a^{30} b^{15} (b^3)^5} \quad (27)$$

$$\frac{(3^2)^7 5^{10} (5^3)^2}{3^9 5^{16}} \quad (30)$$

פשט את הבאים לפי הכללים: $(ab)^n = a^n b^n$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$$(a^4 b^8)^4 \quad (33)$$

$$(a^6 b^3)^2 \quad (32)$$

$$(a^2 b)^3 \quad (31)$$

$$\left(\frac{a^3 b^7}{b^4}\right)^2 \quad (36)$$

$$\left(\frac{a^8}{b^2}\right)^4 \quad (35)$$

$$\left(\frac{a^5}{b^4}\right)^3 \quad (34)$$

$$\left(\frac{a^2 a^7 b^9}{b^3 a^6 b^4}\right)^{30} \quad (39)$$

$$\left(\frac{a^6 b^{10}}{a^3 b^4 b^5}\right)^{12} \quad (38)$$

$$\left(\frac{a^4 b^{10}}{a^3 b^8}\right)^{20} \quad (37)$$

$$\left(\frac{(5^4)^2 3^6}{3^5 \cdot 5^7}\right)^2 \quad (42)$$

$$\left(\frac{2^{40} 3^{20}}{3^{18} 2^{39}}\right)^3 \quad (41)$$

$$\left(\frac{(a^2)^3 b^{20}}{a^5 (b^2)^7}\right)^3 \quad (40)$$

$$\left(\frac{3^5 2^6 2^2}{3^6 2^5 3^2}\right)^2 \quad (43)$$

פשט את הבאים לפי הכללים: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

$$6^0 \cdot 3^{-3} \quad (46)$$

$$2^{-3} \quad (45)$$

$$3^{-2} \quad (44)$$

$$\left(\frac{6}{5}\right)^{-2} \quad (49)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \quad (48)$$

$$-2^{-4} \quad (47)$$

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^{-2} \quad (52)$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} \quad (51)$$

$$\left(-\frac{4}{7}\right)^{-2} \quad (50)$$

$$\left(\frac{a^4}{b^3}\right)^{-4} \quad (55)$$

$$(ab)^{-2} \quad (54)$$

$$\left(\frac{2^4 3^3}{32^2}\right)^{-3} \quad (53)$$

$$\left(\frac{a^{24} b^{25}}{(a^3)^6 (b^2)^2 b^{20}}\right)^{-1} \quad (58)$$

$$\left(\frac{(a^2)^4 a^3 b^{12} b^4}{a^{11} b^{15}}\right)^{-5} \quad (57)$$

$$\left(\frac{a^4 a^2 b^6}{ab^6}\right)^{-3} \quad (56)$$

(59) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שורשים):

$$\sqrt[3]{8} \quad \text{ג.}$$

$$-\sqrt{25} \quad \text{ב.}$$

$$\sqrt{49} \quad \text{א.}$$

$$\left(\sqrt[5]{1024}\right)^2 \quad \text{ו.}$$

$$\sqrt[3]{(-2)^6} \quad \text{ה.}$$

$$-\sqrt[3]{128} \quad \text{ד.}$$

$$\sqrt[4]{-25^2} \quad \text{ט.}$$

$$\sqrt[4]{-16} \quad \text{ח.}$$

$$\left(\sqrt[5]{-243}\right)^3 \quad \text{ז.}$$

$$\left(\sqrt[5]{-32}\right)^3 \quad \text{יב.}$$

$$\sqrt[6]{-8^4} \quad \text{יא.}$$

$$\sqrt[4]{(-25)^2} \quad \text{י.}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} \quad \text{טו.}$$

$$\sqrt[6]{(-1000)^2} \quad \text{יד.}$$

$$\left(\sqrt[3]{-1000}\right)^2 \quad \text{יג.}$$

$$\sqrt[5]{9} \cdot \sqrt[5]{27} \quad \text{יח.}$$

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} \quad \text{יז.}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{32} \quad \text{טז.}$$

$$\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[3]{3} \quad \text{כ.א.} \qquad \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} \quad \text{כ.} \qquad \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{8} \quad \text{יט.}$$

(60) הכנס לתוך השורש את המקדם שלפניו:

$$\begin{array}{llll} \frac{\sqrt{75}}{5} \quad \text{ד.} & \frac{\sqrt{24}}{2} \quad \text{ג.} & 3\sqrt{6} \quad \text{ב.} & 5\sqrt{2} \quad \text{א.} \\ \frac{2\sqrt[3]{20}}{5} \quad \text{ח.} & 4\sqrt[5]{3} \quad \text{ז.} & 3\sqrt[4]{7} \quad \text{ו.} & \frac{4\sqrt{300}}{10} \quad \text{ה.} \end{array}$$

(61) הוצא מתוך השורש את השלם הגדול ביותר:

$$\begin{array}{llll} \sqrt{90} \quad \text{ד.} & \sqrt{320} \quad \text{ג.} & \sqrt{50} \quad \text{ב.} & \sqrt{40} \quad \text{א.} \\ \sqrt[5]{160} \quad \text{ח.} & \sqrt[3]{56} \quad \text{ז.} & \sqrt[3]{108} \quad \text{ו.} & \sqrt{250} \quad \text{ה.} \\ & & \sqrt[4]{162} \quad \text{י.} & \sqrt[5]{972} \quad \text{ט.} \end{array}$$

(62) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{llll} \left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{5}{2}} \quad \text{ד.} & \left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5} \quad \text{ג.} & 32^{-\frac{3}{5}} \quad \text{ב.} & 8^{\frac{2}{3}} \quad \text{א.} \\ & 16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} \quad \text{ז.} & 343^{-\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}} \quad \text{ו.} & 81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{-\frac{1}{3}} \quad \text{ה.} \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{l} 256 \quad (11 \quad a^{23}b^{17} \quad (10 \quad a^3b^6 \quad (9 \quad b^7 \quad (8 \quad b^3 \quad (7 \quad a^7 \quad (6 \quad a^9 \quad (5 \quad a^5 \quad (4 \quad a^{21} \quad (3 \quad a^{18} \quad (2 \quad a^8 \quad (1 \\ a^4 \quad (22 \quad a^{45} \quad (21 \quad a^{23} \quad (20 \quad a^{24} \quad (19 \quad a^{12} \quad (18 \quad 3 \quad (17 \quad 7/4 \quad (16 \quad 40 \quad (15 \quad 24 \quad (14 \quad 9 \quad (13 \quad 3^9 \quad (12 \\ a^{16}b^{32} \quad (33 \quad a^{12}b^6 \quad (32 \quad a^6b^3 \quad (31 \quad 3^5 \quad (30 \quad 1 \quad (29 \quad 3 \quad (28 \quad a^2 \quad (27 \quad \frac{b^2}{a^3} \quad (26 \quad 3^7 \quad (25 \quad 2 \quad (24 \quad a^{22} \quad (23 \\ 225 \quad (42 \quad 5832 \quad (41 \quad a^3b^{18} \quad (40 \quad a^{90}b^{60} \quad (39 \quad a^{36}b^{12} \quad (38 \quad a^{20}b^{40} \quad (37 \quad a^6b^6 \quad (36 \quad \frac{a^{32}}{b^8} \quad (35 \quad \frac{a^{15}}{b^{12}} \quad (34 \\ \frac{25}{16} \quad (52 \quad -\frac{27}{8} \quad (51 \quad \frac{49}{16} \quad (50 \quad \frac{25}{36} \quad (49 \quad 3 \quad (48 \quad -\frac{1}{16} \quad (47 \quad \frac{1}{27} \quad (46 \quad \frac{1}{8} \quad (45 \quad \frac{1}{9} \quad (44 \quad \frac{64}{729} \quad (43 \\ -2 \quad \text{ד.} \quad 2 \quad \text{ג.} \quad -5 \quad \text{ב.} \quad 7 \quad \text{א.} \quad (59 \quad \frac{1}{a^6b} \quad (58 \quad \frac{1}{b^5} \quad (57 \quad \frac{1}{a^{15}} \quad (56 \quad \frac{b^{12}}{a^{16}} \quad (55 \quad \frac{1}{a^2b^2} \quad (54 \quad \frac{1}{6^6} \quad (53 \\ \text{ה.} \quad 4 \quad \text{ו.} \quad 16 \quad \text{ז.} \quad -27 \quad \text{ח.} \quad \phi \quad \text{ט.} \quad \phi \quad \text{י.} \quad \pm 5 \quad \text{יב.} \quad \phi \quad \text{יג.} \quad -8 \quad \text{יד.} \quad 10 \\ \text{טו.} \quad 6 \quad \text{טז.} \quad 8 \quad \text{יז.} \quad 20 \quad \text{יח.} \quad 3 \quad \text{יט.} \quad 2 \quad \text{כ.} \quad 6 \quad \text{כא.} \quad 3. \end{array}$$

$$(60) \quad \text{א.} \quad \sqrt{50} \quad \text{ב.} \quad \sqrt{54} \quad \text{ג.} \quad \sqrt{6} \quad \text{ד.} \quad \sqrt{3} \quad \text{ה.} \quad \sqrt{48} \quad \text{ו.} \quad \sqrt[4]{567} \quad \text{ז.} \quad \sqrt[5]{3072} \quad \text{ח.} \quad \sqrt[3]{\frac{32}{25}}$$

- (61) א. $2\sqrt{10}$ ב. $5\sqrt{2}$ ג. $8\sqrt{5}$ ד. $3\sqrt{10}$ ה. $5\sqrt{10}$ ו. $3\sqrt[3]{4}$ ז. $2\sqrt[3]{7}$ ח. $2\sqrt[5]{5}$ ט. $3\sqrt[5]{4}$ י. $3\sqrt[4]{2}$
- (62) א. 4 ב. $\frac{1}{8}$ ג. 125 ד. $\frac{32}{243}$ ה. $\frac{27}{4}$ ו. $\frac{10}{49}$ ז. $\frac{1}{2}$

משוואות מעריכיות:

פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

$$\begin{array}{lll} 25 \cdot 5^{x^2+x} = 5^x & \mathbf{(12)} & 100^x = 10000^{x+1} \quad \mathbf{(7)} & 2^x = 32 \quad \mathbf{(1)} \\ 4^{x^2} = 2^{x+1} & \mathbf{(13)} & 6^{x^2-4} = 1 \quad \mathbf{(8)} & 3^{2x} = 27 \quad \mathbf{(2)} \\ \frac{3^{x^2}}{3^{6(x+1)}} = 3 & \mathbf{(14)} & (3^x \cdot 27)^4 = 9 \quad \mathbf{(9)} & 5^x \cdot 25^{x-1} = 625 \quad \mathbf{(3)} \\ 10^x (10^x)^x = 100 & \mathbf{(15)} & (5^{2x} \cdot 125^{x-3})^3 = \frac{1}{25} \quad \mathbf{(10)} & (4^{x-1})^2 = 8 \quad \mathbf{(4)} \\ \frac{(3^x)^{3x}}{27} = \frac{3^x}{3} & \mathbf{(16)} & (2^{x^2})^4 \cdot 8^x = 2 \quad \mathbf{(11)} & 3^x \cdot 81^{x+2} = 9^{2x-1} \quad \mathbf{(5)} \\ & & & 32^{\frac{x}{3}+5} = 4^{\frac{x}{2}-1} \quad \mathbf{(6)} \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות (הבסיס הוא שבר):

$$\begin{array}{lll} 8 \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = 27 & \mathbf{(25)} & 16 \cdot (2^{3x+5} \cdot 8^{x+5})^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+8} \quad \mathbf{(21)} & 3^x = \frac{1}{27} \quad \mathbf{(17)} \\ 4 \left(\frac{2}{7}\right)^{2x-1} \left(\frac{7}{2}\right)^{3-x} = 49 & \mathbf{(26)} & \frac{2^x}{8^{3x-2}} \left(\frac{4^{3-x}}{2^{x-4}}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \mathbf{(22)} & \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \cdot 8^x \quad \mathbf{(18)} \\ 27 \left(\frac{3}{5}\right)^{2x^2+9x} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x+7} = 125 & \mathbf{(27)} & \left(\frac{2}{5}\right)^{3x} = \frac{4}{25} \quad \mathbf{(23)} & 27^x = \left(\frac{1}{9}\right)^{x-2} \quad \mathbf{(19)} \\ 49 \left(\frac{5}{7}\right)^{3x^2+x} \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^{4-6x} = 25 & \mathbf{(28)} & 27 \left(\frac{3}{2}\right)^{4x+1} = 8 \quad \mathbf{(24)} & \frac{8}{32^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4x-1} \quad \mathbf{(20)} \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי שורשים):

$$\text{תזכורת: } \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\begin{array}{lll} x+1\sqrt{5^x} = 25 \quad (41) & \sqrt[3]{8^x} \cdot (2 \cdot 32^x) = \sqrt[5]{1024} \quad (35) & \sqrt{3^{x+2}} = 81 \quad (29) \\ 27 \cdot \sqrt[3]{81} = 3^x \quad (42) & \sqrt[5]{256} = \frac{\sqrt{2^x}}{4 \cdot 8^x} \quad (36) & (\sqrt{5^x})^3 = 125 \quad (30) \\ 100 \cdot \sqrt[3]{10^{x^2-3}} = 10,000 \quad (43) & \left(\frac{1}{9}\right)^x \sqrt{3 \cdot \sqrt[5]{27^x}} = 1 \quad (37) & 2^{2x-1} \cdot \sqrt{4^x \cdot 64} = 256 \quad (31) \\ 9 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^x = \sqrt[3]{3} \quad (44) & \sqrt{10^{2x+1}} = 1000 \cdot \sqrt[3]{10^x} \quad (38) & (9\sqrt{27})^x \cdot 3^{x+2} = \frac{1}{9} \quad (32) \\ \sqrt{32} \cdot 2^{x^2+4x} = \sqrt{\frac{1}{8}} \quad (45) & 81 \cdot \sqrt[8]{3^x} = 27^{x+9} \quad (39) & \frac{125 \cdot 5^{x+1}}{\sqrt{25^x}} = \frac{\sqrt{5}}{5^{3-x}} \quad (33) \\ \sqrt[2]{2 \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{8}}}} = 1 \quad (46) & \sqrt{5^{4x+3}} = \frac{\sqrt[4]{25^{x-2}}}{125} \quad (40) & \left(\frac{1}{49}\right)^x = \sqrt{7 \cdot 343^x \cdot \sqrt{7^x}} \quad (34) \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

$$\begin{array}{lll} 3^x \cdot 2^x = \sqrt{729} \cdot 10^3 \cdot 5^{-x} \quad (53) & 3^{x+2} \cdot 20 = 405 \cdot 2^x \quad (50) & 2^x \cdot 5^x = 1000 \quad (47) \\ 7^{x^2-1} \cdot 10^{x^2+4} = 7 \cdot 10^6 \quad (54) & 5 \cdot 3^{x+4} = 2187 \cdot 5^{x-2} \quad (51) & 4 \cdot 3^x \cdot 2^x = 144 \quad (48) \\ \sqrt[3]{3^{x-1} \cdot 2^{x-2} \cdot 5^{x-3}} = 0.02 \quad (55) & 2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392 \quad (52) & 5^{x+1} \cdot 3^{x-2} = 125 \quad (49) \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פעולות חיבור וחסור):

$$\begin{array}{lll} (2^{3x+1})^2 - 64^{x-\frac{1}{3}} = 3.75 \quad (70) & 3^{x+2} - 3^{x-2} = 240 \quad (63) & 3^x + 3^x = 18 \quad (56) \\ 3^{2-x} + 3^{1-x} = 4 \quad (71) & 2^{x+3} + 2^{x-1} = \frac{17}{16} \quad (64) & 5^x + 6 \cdot 5^x = 875 \quad (57) \\ 25^{2-x} - 5^{1-2x} = 124 \quad (72) & 3^{x-2} - 3^{x-3} = 54 \quad (65) & 2^x + 4 \cdot 2^x = 80 \quad (58) \\ 3^{3x+1} + 2178 = 27^{x+2} \quad (73) & 81^{x+1} + 18 \cdot 3^{4x-3} = 245 \quad (66) & 7 \cdot 10^x - 10^x = 600 \quad (59) \\ 468 - 6^x = 2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \quad (74) & 5^{3x+2} + 3 \cdot 125^x = 28 \quad (67) & 7 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^x = \frac{5}{27} \quad (60) \\ 8^{x+2} \cdot 3^{x-1} + 410 \frac{2}{3} = 4^{x+\frac{1}{2}} \cdot 6^{x+3} \quad (75) & 2^{2x-1} + 4^{x+2} = 66 \quad (68) & 8^x + 8^{x+2} = 1040 \quad (61) \\ 10^{x+1} \cdot 2^{x-1} + 6 \cdot 10^3 = 5^{x+1} \cdot 4^{x+1} \quad (76) & 16^{x+\frac{1}{2}} - 4^{2x-\frac{1}{2}} = 14 \quad (69) & 2^x + 2^{x+5} = 1056 \quad (62) \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פעולות חיבור וחסור):

$$\frac{7^x}{7^x-4} + \frac{8}{7^x+5} = 3 \quad (90)$$

$$\frac{8}{9^x+4} + 3 = -\frac{77}{81^x-16} \quad (91)$$

$$\frac{3^{x+2}}{3^{2x}+3^x-2} - \frac{6}{3^x+2} = \frac{3^x}{3^x-1} \quad (92)$$

$$\frac{25 \cdot 2^x - 68}{2^x - 2} = \frac{5 \cdot 2^{x+2} + 82}{2^x + 3} \quad (93)$$

$$36^{-x} - 7 \cdot 6^{-x} + 6 = 0 \quad (84)$$

$$16^{x+2} + 96 \cdot 4^{x-1} = 1 \quad (85)$$

$$2 \cdot 2^{4x+1} + 3 \cdot 4^x = 1 \quad (86)$$

$$4^{1.5x+1} + 3 \cdot 2^{6x-3} = 56 \quad (87)$$

$$2^{\frac{2}{3}x+3} - 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}x+1} = -1 \quad (88)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}x-2} - 26 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}x} = 3 \quad (89)$$

$$2^{x+2} + 2^{-x} = 8.5 \quad (77)$$

$$3^x - 3^{2-x} = 8 \quad (78)$$

$$5^x + 5^{2-x} = 26 \quad (79)$$

$$7^{x+4} + 7^{-x} = 350 \quad (80)$$

$$2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 8 = 0 \quad (81)$$

$$9^x - 36 \cdot 3^x + 243 = 0 \quad (82)$$

$$16^{x+1} - 65 \cdot 4^x + 4 = 0 \quad (83)$$

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 2^{x+1} + 3^{y+1} = 17 \\ 3 \cdot 2^{x+1} - 3^y = 21 \end{cases} \quad (100)$$

$$\begin{cases} 2^{x+3y} = 8 \\ 3^{2x+7y} = 81 \end{cases} \quad (97)$$

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ 3^x + 3^y = 36 \end{cases} \quad (94)$$

$$\begin{cases} 3^x - 7^y = 20 \\ 9^x - 3 \cdot 49^y = 582 \end{cases} \quad (101)$$

$$\begin{cases} 7^{3x-7y} = 7 \\ 2^{2x-12y} = 256 \end{cases} \quad (98)$$

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{cases} \quad (95)$$

$$\begin{cases} 2^x + 5^y = 29 \\ 3 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^y = 1298 \end{cases} \quad (102)$$

$$\begin{cases} 2^x + 3^y = 5 \\ 2^x - 3^y = -1 \end{cases} \quad (99)$$

$$\begin{cases} 2x - 1 = y \\ 4 \cdot 3^x - 3^{y+2} = -15 \end{cases} \quad (96)$$

פתור את אי-השוויונים המעריכיים הבאים:

תזכורת: אם: $a > 1$ אז: $a^x > a^y \Rightarrow x > y$ ואם: $0 < a < 1$ אז: $a^x > a^y \Rightarrow x < y$.

$$3^{x-2} > 27 \quad (104)$$

$$2^x < 16 \quad (103)$$

$$5^{2x-1} \leq \left(\frac{1}{25}\right)^x \quad (106)$$

$$16^x < 8^{x+1} \quad (105)$$

$$2 \cdot 16^{x^2} \cdot 32^x > 1 \quad (108)$$

$$27^x \cdot 3^{x^2} > 3^{x+3} \quad (107)$$

$$0.3^{6x-1} < 0.3^{13-x} \quad (110)$$

$$64^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x > 1024 \quad (109)$$

$$\left(\frac{1}{32}\right)^{x+1} \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{3-2x} \quad (112)$$

$$0.6^{x+1} \geq 0.6^{x^2-1} \quad (111)$$

$$\left(\frac{1}{625}\right)^x < 5^{x^2} \quad (114)$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2} \cdot \sqrt{27^{x+1}} \geq 3 \quad (113)$$

$$27 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{3x-1} < 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2-x} \quad (116)$$

$$\left(\frac{1}{100}\right)^{x^2-1} \geq 1000^{1-x} \quad (115)$$

$$81 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2+3x} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-4x} < 16 \quad (118)$$

$$\frac{1}{9} \leq 3^{x+2} \leq 27 \quad (120)$$

$$1 \leq 125 \cdot 5^x \leq 5^{x^2+1} \quad (122)$$

$$0 < 25^x \cdot 5^{x^3} < 5 \cdot \sqrt{625^x} \quad (124)$$

$$9^x - \frac{10}{9} \cdot 3^{x+2} + 9 < 0 \quad (126)$$

$$2^x \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{16}{x-6}} \geq 5^x \quad (128)$$

$$4 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{2x-1} < 5 \cdot \left(\frac{25}{16}\right)^x \quad (117)$$

$$125 \cdot \sqrt[3]{5^x} > \sqrt[3]{5^{8x^2}} \quad (119)$$

$$1 \leq 4^{2x-1} \cdot 2^{x-1} \leq 128 \quad (121)$$

$$0 < 8^x \cdot 2^{x^2} < 16 \quad (123)$$

$$16^x - 4^x - 12 > 0 \quad (125)$$

$$2^x - 3 \cdot 2^{4-x} > 2 \quad (127)$$

$$7^{\frac{2x-5}{x-2}} < 343 \quad (129)$$

תשובות סופיות:

- $1 \frac{2}{3}$ (10 -2.5 (9 ± 2 (8 -2 (7 -40.5 (6 -10 (5 1.75 (4 2 (3 1.5 (2 5 (1
 -0.5 (18 -3 (17 1, $-\frac{2}{3}$ (16 1, -2 (15 7, -1 (14 -0.5, 1 (13 ϕ (12 -1, $\frac{1}{4}$ (11
 $\frac{2}{3}$, -3 (28 $\frac{1}{2}$, -4 (27 $\cdot \frac{2}{3}$ (26 ϕ (25 -1 (24 $\frac{2}{3}$ (23 2 (22 -4 (21 2 (20 0.8 (19
 3.75 (38 $\frac{5}{17}$ (37 -1.44 (36 $\frac{1}{6}$ (35 $-\frac{2}{15}$ (34 6.5 (33 $-\frac{8}{9}$ (32 2 (31 2 (30 6 (29
 2 (48 3 (47 1, -3 (46 -2 (45 ϕ (44 3, -1 (43 4, -1 (42 -2 (41 $-3\frac{2}{3}$ (40 -8 (39
 -3 (60 2 (59 4 (58 3 (57 2 (56 1 (55 $\pm\sqrt{2}$ (54 3 (53 2 (52 3 (51 2 (50 2 (49
 $\frac{1}{3}$ (73 $\frac{1}{2}$ (72 1 (71 0 (70 $\frac{1}{2}$ (69 .1 (68 0 (67 $\frac{1}{4}$ (66 6 (65 -3 (64 3 (63 5 (62 $\frac{4}{3}$ (61
 .2,3 (82 3 (81 -3, -1 (80 2, 0 (79 2 (78 1, -3 (77 2 (76 0 (75 2 (74
 $-\frac{1}{2}$ (91 1 (90 -4 (89 -6, -3 (88 1 (87 -1 (86 -2.5 (85 -1, 0 (84 -2, 1 (83
 (1,1) (99 (-2,-1) (98 (9,-2) (97 (1,1) (96 (2,1) (95 (2,3) (94 3 (93 1 (92
 $x < 4$ (103 (2,2), (4.26,1.418) (102 (3,1), (3.182,1.318) (101 (2,1) (100
 $x < -1, x > -0.25$ (108 $x < -3, x > 1$ (107 $x \leq 0.25$ (106 $x < 3$ (105 $x > 5$ (104
 $x < -4, x > 0$ (114 $-\frac{1}{4} \leq x \leq 1$ (113 $x \leq \frac{1}{9}$ (112 $x \leq -1, x \geq 2$ (111 $x > 2$ (110 $x > 2$ (109

$$\begin{aligned}
 & -1 < x < \frac{9}{8} \text{ (119)} \quad x < -4, x > \frac{1}{2} \text{ (118)} \quad x > -1.5 \text{ (117)} \quad x > 1 \text{ (116)} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ (115)} \\
 & -4 < x < 1 \text{ (123)} \quad -3 \leq x \leq -1, x \geq 2 \text{ (122)} \quad \frac{3}{5} \leq x \leq 2 \text{ (121)} \quad -4 \leq x \leq 1 \text{ (120)} \\
 & .x < 1, x > 2 \text{ (129)} \quad x < 6 \text{ (128)} \quad x > 3 \text{ (127)} \quad 0 < x < 2 \text{ (126)} \quad x > 1 \text{ (125)} \quad x < 1 \text{ (124)}
 \end{aligned}$$

הגדרת הלוגריתם ומשוואות לוגריתמיות יסודיות:

חשב את ערכי הלוגריתמים הבאים:

תזכורת: הגדרת הלוגריתם: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ (כאשר: $a > 0, a \neq 1, b > 0$).

$\log_5 5$ (3)	$\log_3 81$ (2)	$\log_2 8$ (1)
$\log_{125} 5$ (6)	$\log_{32} 8$ (5)	$\log_9 243$ (4)
$\log_{\frac{1}{2}} 16$ (9)	$\log_{32} 64$ (8)	$\log_{49} 7$ (7)
$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{8}$ (12)	$\log_{\frac{1}{25}} 625$ (11)	$\log_{\frac{1}{3}} 27$ (10)
$\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{9}$ (15)	$\log_{\frac{5}{3}} \frac{27}{125}$ (14)	$\log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4}$ (13)
$\log_{\frac{1}{27}} \sqrt[4]{3}$ (18)	$\log_{\sqrt[3]{7}} \frac{1}{343}$ (17)	$\log_{\sqrt[3]{5}} 125$ (16)
$\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{25}}} \sqrt[5]{125}$ (21)	$\log_{\frac{1}{\sqrt{27}}} \sqrt[3]{81}$ (20)	$\log_{\frac{1}{8}} \sqrt[5]{128}$ (19)
$\log_{0.01} \frac{10}{\sqrt[4]{1000}}$ (24)	$\log \frac{\sqrt[5]{100}}{\sqrt{10}}$ (23)	$\log \frac{\sqrt{10}}{1000}$ (22)

מצא את x במשוואות הלוגריתמיות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \log_6 x = 1 & \text{(27)} & \log_2 x = 5 & \text{(26)} & \log_3 x = 2 & \text{(25)} \\ \log_7 x = 0 & \text{(30)} & \log_4 x = -2 & \text{(29)} & \log_3 x = -3 & \text{(28)} \\ \log_{\frac{1}{8}} x = \frac{1}{3} & \text{(33)} & \log_{\frac{3}{5}} x = 4 & \text{(32)} & \log_{\frac{1}{3}} x = -2 & \text{(31)} \\ \log_{\sqrt{5}} x + 2 = 0 & \text{(36)} & 7 \log_{128} x - 3 = 0 & \text{(35)} & 4 \log_9 x - 2 = 0 & \text{(34)} \end{array}$$

מצא את x במשוואות הלוגריתמיות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \log_x 25 = 2 & \text{(39)} & \log_x 6 = -1 & \text{(38)} & \log_x 3 = 1 & \text{(37)} \\ \log_x 64 = 3 & \text{(42)} & \log_x 625 = 4 & \text{(41)} & \log_x 64 = 2 & \text{(40)} \\ \log_x \frac{1}{81} = 4 & \text{(45)} & \log_x \frac{4}{9} = -2 & \text{(44)} & \log_x \frac{1}{8} = 3 & \text{(43)} \end{array}$$

פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוגריתם):

$$\begin{array}{lll} \log_5 (6 - 7x) = 3 & \text{(48)} & \log_2 (x + 5) = 4 & \text{(47)} & \log_5 (x + 1) = 1 & \text{(46)} \\ \log_{64} (x + 3) = \frac{1}{3} & \text{(51)} & \log_4 (4x + 1) = \frac{1}{2} & \text{(50)} & \log_6 (3x - 2) = 0 & \text{(49)} \\ \log_{0.2} (2x + 1) = -2 & \text{(54)} & \log_{\sqrt{3}} (7x + 2) = 2 & \text{(53)} & \log_{\sqrt{5}} (3x + 1) = 4 & \text{(52)} \\ \log_3 \left(x^2 - \frac{2}{9}x \right) = -3 & \text{(57)} & \log_6 (13x - x^2) = 2 & \text{(56)} & \log_4 (10x - x^2) = 2 & \text{(55)} \\ \log_3 (x - 2x^2 + 28) = 3 & \text{(60)} & \log_2 (x^2 - 6x + 13) = 3 & \text{(59)} & \log_2 (x^2 - 6x + 10) = 1 & \text{(58)} \\ \log_7 (x^4 - 80) = 0 & \text{(63)} & \log_3 (x^3 - 44) = 4 & \text{(62)} & \log_4 (x^3 - 11) = 2 & \text{(61)} \\ \log_2 \frac{x^2 - 5}{x} = 2 & \text{(66)} & \log_3 \frac{20x + 68}{5x + 2} = 2 & \text{(65)} & \log_4 \frac{3x - 1}{x + 2} = 1 & \text{(64)} \\ \log_x (2x^2 - 6x + 5) = 2 & \text{(69)} & \log_x (3x^2 - 5x + 3) = 2 & \text{(68)} & \log_x (2x^2 - 9x) = 2 & \text{(67)} \\ \log_{x+2} (4x + 5) = 2 & \text{(72)} & \log_x (2x^2 + x - 6) = 2 & \text{(71)} & \log_x (4x^2 - 3x) = 2 & \text{(70)} \\ \log_{\sqrt{x+1}} (x^2 - x - 2) = 2 & \text{(75)} & \log_{\sqrt{x}} \left(\frac{8}{x} \right) = 4 & \text{(74)} & \log_{x-3} (3x - 11) = 2 & \text{(73)} \\ \log_{\sqrt{x^2+3}} (4 + 3x + 3x^2) = 2 & \text{(78)} & \log_{\sqrt{x+3}} (x + 5) = 4 & \text{(77)} & \log_4 (10x - x^2) = 2 & \text{(76)} \end{array}$$

פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוגריתם מספר פעמים):

$$2 \log_9 (\log_5 (2x-1)) = 1 \quad (80) \qquad \log_3 (\log_2 x) = 1 \quad (79)$$

$$\log_{\frac{1}{16}} (\log_3 (x^2 - 7.5x)) = -\frac{1}{2} \quad (82) \qquad \log_2 (\log_3 (x+3) + 30) = 5 \quad (81)$$

$$\log_{25} (2 - 5^{x+2}) = x + 2 \quad (84) \qquad \log_2 \left(\log_{0.25} \left(x^2 + \frac{1}{4} \right) \right) = -1 \quad (83)$$

$$\log_5 (4 + \log_6 (3 + \log_4 (x^2 + 15))) = 1 \quad (86) \qquad \log_5 (\log_3 (\log_3 (5x^2 + 7))) = 0 \quad (85)$$

פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

$$\log_3 (5 \cdot 2^x + 1) = 4 \quad (88) \qquad \log_2 (5^x + 3) = 7 \quad (87)$$

$$\log_5 (5^x + 120) - x = 2 \quad (90) \qquad \log_2 (12 - 2^x) = x + 1 \quad (89)$$

$$\log_9 (10 \cdot 3^x - 9) = x \quad (92) \qquad \log_4 (5 \cdot 2^{x+1} - 16) = x \quad (91)$$

$$\log_4 (17 - 4^x) + x = 2 \quad (94) \qquad \log_5 (30 - 5^x) + x = 3 \quad (93)$$

$$\log_2 (5 \cdot 2^{x+1} - 1) = 2x + 4 \quad (96) \qquad \log_5 (49 \cdot 5^x - 120) = 2x + 1 \quad (95)$$

$$3 \log_2 (9 \cdot 2^{\frac{x+1}{3}} - 1) = 15 + 2x \quad (98) \qquad \log_8 (3 - 23 \cdot 8^{3x}) = 6x + 1 \quad (97)$$

פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות:

הדרכה: היעזר בהצבה של: $\log_a x = t$, פתור משוואה עבור t והחזר את ההצבה למציאת x עפ"י הגדרת הלוגריתם.

$$(\log_2 x)^2 + 2 \cdot \log_2 x - 15 = 0 \quad (100) \qquad (\log_3 x)^2 = 16 \quad (99)$$

$$\log_7 x - \frac{6}{\log_7 x} = 1 \quad (102) \qquad 2 \cdot (\log_4 x)^2 - 5 \cdot \log_4 x = 3 \quad (101)$$

$$\frac{5 \cdot \log_{64} x - 1}{(\log_{64} x)^2} = 6 \quad (104) \qquad \frac{12}{\log_3 x + 1} - \frac{2}{\log_3 x} = 3 \quad (103)$$

$$\sqrt{\log_{16} x} + \sqrt{\log_{16} x + 2} = 2 \quad (106) \qquad \log_3 x + \sqrt{\log_3 x} = 2 \quad (105)$$

$$(\log_3 x)^2 + \sqrt{(\log_3 x)^2 + 27} = 3 \quad (107)$$

תשובות סופיות:

$$1.5 \quad (12) \quad -2 \quad (11) \quad -3 \quad (10) \quad -4 \quad (9) \quad \frac{6}{5} \quad (8) \quad \frac{1}{2} \quad (7) \quad \frac{1}{3} \quad (6) \quad 0.6 \quad (5) \quad 2.5 \quad (4) \quad 1 \quad (3) \quad 4 \quad (2) \quad 3 \quad (1)$$

לפתרון מלא בסרטון ודאו היכנסו ל- www.Gool.co.il

כתב ופתר - גיא סלומון ©

-2.5 (22 -0.9 (21 $-\frac{8}{9}$ (20 $-\frac{7}{15}$ (19 $-\frac{1}{12}$ (18 -9 (17 .9 (16 6 (15 -3 (14 -2 (13
 0.5 (33 $\frac{81}{625}$ (32 9 (31 1 (30 $\cdot\frac{1}{16}$ (29 $\frac{1}{27}$ (28 6 (27 32 (26 9 (25 $-\frac{1}{8}$ (24 -0.1 (23
 $\frac{1}{3}$ (45 1.5 (44 $\frac{1}{2}$ (43 4 (42 5 (41 8 (40 5 (39 $\frac{1}{6}$ (38 3 (37 0.2 (36 8 (35 3 (34
 4,9 (56 2,8 (55 12 (54 $\frac{1}{7}$ (53 8 (52 1 (51 0.25 (50 1 (49 -17 (48 11 (47 4 (46
 -1,5 (66 2 (65 -9 (64 ± 3 (63 5 (62 3 (61 1, $-\frac{1}{2}$ (60 1,5 (59 4,2 (58 $\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}$ (57
 -1 (77 8,2 (76 3 (75 2 (74 5 (73 1 (72 2 (71 ϕ (70 5 (69 1.5 (68 9 (67
 ± 7 (86 ± 2 (85 -2 (84 $\pm\frac{1}{2}$ (83 -6,13.5 (82 6 (81 63 (80 8 (79 -1, $-\frac{1}{2}$ (78
 -3,-1 (96 0.974 ,1 (95 2,0 (94 1,2 (93 2,0 (92 1,3 (91 1 (90 2 (89 4 (88 3 (87
 $\sqrt[3]{3}, 9$ (103 $\frac{1}{49}, 343$ (102 $\frac{1}{2}, 64$ (101 $\frac{1}{32}, 8$ (100 $\frac{1}{81}, 81$ (99 -12,-3 (98 $-\frac{1}{3}$ (97
 $\cdot\frac{1}{27}, 27$ (107 2 (106 3,81 (105 4,8 (104

חוקי הלוגריתמים ומשוואות לוגריתמיות:

תזכורת – חוקי הלוגריתמים:

$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$	$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$	$\log_a (x)^n = n \cdot \log_a x$
--	--	-----------------------------------

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$\log_2 10 + \log_2 6.4$ (3)	$\log_8 4 + \log_8 16$ (2)	$\log_3 6 + \log_3 1.5$ (1)
$\log_2 768 - \log_2 6$ (6)	$\log_4 192 - \log_4 3$ (5)	$\log_5 150 - \log_5 6$ (4)
$\log_{0.25} 80 - \log_{0.25} 5$ (9)	$\log_{0.2} 2 - \log_{0.2} 10$ (8)	$\log_{81} 120 - \log_{81} 40$ (7)
$3\log_3 6 + \log_3 3.375$ (12)	$\log_4 1.6 + 2\log_4 \sqrt{10}$ (11)	$2\log_6 2 + \log_6 9$ (10)
$\log_4 24 + \log_4 5 - \log_4 10 - \log_4 3$ (14)		$\log_3 18 + \log_3 6 - \log_3 4$ (13)
$\log_6 10 - \log_6 5 - \log_6 288 + \log_6 4$ (16)		$\log_5 50 + \log_5 20 - \log_5 2 - \log_5 4$ (15)
$\frac{1}{2} \left(\log_{\frac{1}{5}} \frac{5}{2} + \log_{\frac{1}{5}} 2 \right) + \log_{\frac{1}{5}} 10 - \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{5}} 8$ (18)		$\frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} 25 + 2 \log_{\sqrt{3}} 2 - \log_{\sqrt{3}} 60$ (17)
$-\frac{1}{4} \log_{\sqrt{7}} 81 + 2 \log_{\sqrt{7}} 6 - \log_{\sqrt{7}} 84$ (20)		$\frac{1}{2} \log_{\sqrt[3]{2}} 6 - \frac{1}{2} \log_{\sqrt[3]{2}} 3 + \frac{3}{2} \log_{\sqrt[3]{2}} 4$ (19)

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

טיפ: הפוך את המספרים השלמים לביטוי לוגריתמי לפי: $k = \log_a a^k$ וחבר אותם לביטויים הנוספים לפי חוקי הלוגריתמים.

דוגמא: נהפוך את 3 לביטוי לוגריתמי על בסיס של 2: $3 = \log_2 2^3 = \log_2 8$.

$\frac{\log_7 4 + \log_7 8}{\log_7 2}$ (23)	$\frac{\log_4 125}{\log_4 5}$ (22)	$\frac{\log_3 16}{\log_3 8}$ (21)
$\frac{\log_7 5 + \log_7 3 - 4}{\log_7 225 - \log_7 256}$ (26)	$\frac{\log_2 5 - \log_2 2 + 1}{\log_2 200 - 3}$ (25)	$\frac{\log_3 6 + 2}{\log_3 108 - \log_3 2}$ (24)
$\frac{2 - 2\log_3 4 + \log_3 8 \frac{8}{9}}{4 - \log_3 0.01 - 2\log_3 18}$ (29)	$\frac{\log_4 18 - \log_4 2 + \log_4 36}{2\log_4 6 - 3\log_4 8 + 4}$ (28)	$\frac{2 - 3\log 5 + \log 50}{1 + \log 128 - 5\log 2}$ (27)

חשב את ערכי הביטויים הבאים (הלוגריתם לפי בסיס 10):

$\frac{\log 8}{\log \sqrt{8}}$ (32)	$\frac{\log 8}{\log 16}$ (31)	$\frac{\log 27}{\log 9}$ (30)
$\frac{2\log 3 + 0.5\log 6}{\log 12 - \log 2}$ (35)	$\frac{\log 72 - \log 8}{\log \sqrt{27}}$ (34)	$\frac{\log 24 - \log 3}{\log 2}$ (33)

$$\frac{1 + \log 5}{\log 2 + 2 \log 5} \quad (36)$$

(37) הוכח את נכונות השוויוניים הבאים (לפי בסיס 10):

$$\frac{\log 125 - 1 + \log 2}{\log 5 + 1 - \log 2} = 1 \quad \text{א.}$$

$$\frac{2 - \log 25 + 2 \log 8}{\log \sqrt[3]{16}} = 6 \quad \text{ב.}$$

$$\frac{\log 9 + 2 \log 5 + \log 4}{\log 10 - \log 2 + \log 6} = 2 \quad \text{ג.}$$

פתור את המשוואות הבאות (איחוד ביטויים באמצעות חוקי הלוגריתמים):

$$\log_{15} x + \log_{15} (x - 2) = 1 \quad (39) \qquad \log_4 x + \log_4 (x - 6) = 2 \quad (38)$$

$$\log_{35} (x - 8) + \log_{35} (x - 6) = 1 \quad (41) \qquad \log_2 x + \log_2 (x - 3) = 2 \quad (40)$$

$$\log_3 (x + 105) - \log_3 (x + 1) = 3 \quad (43) \qquad \log_2 (x + 14) - \log_2 x = 3 \quad (42)$$

$$\log_2 (2x + 8) = 2 + \log_2 (5 - x) \quad (45) \qquad \log_2 (3x + 4) - \log_2 (x - 2) = 1 \quad (44)$$

$$\log_2 (11x + 4) - \log_2 (2x + 1) = \log_2 (2x + 3) \quad (47) \qquad \log_3 (x^2 + 11) = 1 + \log_3 (2x + 1) \quad (46)$$

$$\log_5 (30x + 9) - \log_5 (4x + 5) = \log_5 (3x + 2) \quad (48)$$

$$2 \log_5 (x + 1) = \log_5 (2x + 3.5) + \log_5 x \quad (49)$$

$$\log_2 (x - 4) + \log_2 (x + 2) - \log_2 (x - 3) = 3 \quad (50)$$

$$\frac{\log_7 (12x - 35)}{2 \log_7 x} = 1 \quad (51)$$

פתור את המשוואות הבאות (שימוש בהגדרת הלוגריתם וקבלת משוואה מעריכית):

$$\log_2(5^x + 19) = 3 + \log_2(8 - 5^x) \quad (53) \quad \log_3(2^x + 2) - \log_3(2^x - 14) = 2 \quad (52)$$

$$\log_3(25^x - 8) - 2 = x \log_3 5 \quad (55) \quad 1 + (x + 2) \log_3 2 = \log_3(4^x + 32) \quad (54)$$

$$x \log_2 4 = \log_2(2^x + 28) + x - 3 \quad (57) \quad \log_3(9^{x+3} - 1) = x + 5 + \log_3(3^{x+3} - 1) \quad (56)$$

פתור את המשוואות הבאות (פתיחה באמצעות חוקי הלוגריתמים):

$$\log_4(16x) \cdot \log_4(64x) = 12 \quad (59) \quad \log_3 x \cdot \log_3(3x) = 6 \quad (58)$$

$$\log_2 x \cdot \log_2 \frac{x}{8} = -2 \quad (61) \quad \log_2(32x) \cdot \log_2(128x) = 48 \quad (60)$$

$$\log_4 x^2 \cdot \log_4 \frac{16}{x} = \log_4(4x) \quad (63) \quad \log_3\left(\frac{27}{x}\right) \cdot \log_3(81x) = 10 \quad (62)$$

$$(\log_3 3x)^2 = \log_3 3x^2 + 1 \quad (65) \quad \log_2 x^2 \cdot \log_2(8x) = \log_2\left(\frac{16}{x}\right) \quad (64)$$

$$\log_3(27x^3) \cdot \log_3(3x^2) = \log_3\left(\frac{81}{x}\right) + 3 \quad (67) \quad (\log_5 25x)^2 = \log_5 25x^2 + 1 \quad (66)$$

$$2 \log_5 x \cdot \log_5\left(\frac{125}{x^2}\right) = 2 \quad (69) \quad \log_2\left(\frac{x^3}{2}\right) \cdot \log_2(32x^2) = \log_2\left(\frac{x}{128}\right) + 2 \quad (68)$$

$$\frac{\log_7\left(\frac{343}{x^2}\right)}{(\log_7 x)^2} + \frac{1}{4} = 0 \quad (71) \quad \log_5 x^2 \cdot \log_5\left(\frac{125}{x^2}\right) = 2 \quad (70)$$

תרגילי הבעה – חוקי הלוגריתמים:

(72) נתון: $\log_2 7 = a$. הבע באמצעות a את הביטויים הבאים:

א. $\log_2 14$

ב. $\log_2 49$

(73) נתון: $\log_3 5 = a$. הבע באמצעות a את הביטויים הבאים:

א. $\log_3 125$

ב. $\log_3 0.2$

(74) נתון: $\log_{24} 6 = a$. הבע באמצעות a את הביטויים הבאים:

א. $\log_{24} 2$

ב. $\log_{24} 3$

(75) נתון: $\log 4 = a$. הבע באמצעות a את הביטויים הבאים:

א. $\log 16$

ב. $\log 2$

ג. $\log 8$

(76) נתון: $\log_3 6 = a$, $\log_3 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_3 30$

ב. $\log_3 1.2$

ג. $\log_3 150$

(77) נתון: $\log_4 3 = a$, $\log_4 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_4 0.12$

ב. $\log_4 2.4$

(78) נתון: $\log_7 8 = a$, $\log_7 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_7 40$

ב. $\log_7 320$

(79) נתון: $\log_5 3 = a$, $\log_5 2 = b$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_5 \sqrt{6}$

ב. $\log_5 \sqrt[3]{72}$

(80) נתון: $\log_8 10 = a$, $\log_8 3 = b$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_8 \sqrt{0.03}$

ב. $\log_8 \sqrt[5]{\frac{10}{27}}$

(81) נתון: $\log_3 7 = a$, $\log_3 8 = b$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_3 \frac{64}{343}$

ב. $\log_3 \sqrt[4]{\frac{49}{512}}$

חשב את ערכי הביטויים הבאים באמצעות הנוסחה: $a^{\log_a b} = b$:

(82) $2^{\log_2 3}$ **(83)** $5^{\log_5 12}$ **(84)** $0.24^{\log_{0.24} 6}$ **(85)** $10^{\log 2}$ **(86)** $2^{2 \log_2 3}$

(87) $3^{3 \log_3 4}$ **(88)** $9^{\log_3 4}$ **(89)** $27^{\log_3 2}$ **(90)** $8^{\log_2 3}$ **(91)** $32^{\log_2 3}$

(92) $125^{-\log_5 3}$ **(93)** $\sqrt{6}^{-\log_{36} 4}$ **(94)** $\sqrt{3}^{\log_3 16}$ **(95)** $\sqrt[5]{8}^{\log_2 243}$ **(96)** $\sqrt[3]{5}^{-\log_5 64}$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{\sqrt{49}} 81} \quad (101) \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\sqrt{6}} 4} \quad (100) \quad 5^{\log_{125} 8} \quad (99) \quad 64^{\log_2 5} \quad (98) \quad 3^{\log_9 2} \quad (97)$$

$$\sqrt[3]{2^{3-\log_{\sqrt{8}} 5}} \quad (106) \quad \sqrt{27^{1+\log_3 2}} \quad (105) \quad 4^{\frac{\log_4 9}{2}} \quad (104) \quad 3^{2-\log_3 6} \quad (103) \quad 5^{1+\log_5 2} \quad (102)$$

תשובות סופיות:

$$1 \quad (14) \quad 3 \quad (13) \quad 6 \quad (12) \quad 2 \quad (11) \quad 2 \quad (10) \quad -2 \quad (9) \quad 1 \quad (8) \quad \frac{1}{4} \quad (7) \quad 7 \quad (6) \quad 3 \quad (5) \quad 2 \quad (4) \quad 6 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 2 \quad (1)$$

$$0.5 \quad (25) \quad 1 \quad (24) \quad 5 \quad (23) \quad 3 \quad (22) \quad \frac{4}{3} \quad (21) \quad -2 \quad (20) \quad 10.5 \quad (19) \quad -1.5 \quad (18) \quad -2 \quad (17) \quad -2 \quad (16) \quad 3 \quad (15)$$

$$.1 \quad (36) \quad .2 \quad (35) \quad \frac{4}{3} \quad (34) \quad .3 \quad (33) \quad .2 \quad (32) \quad .0.75 \quad (31) \quad 1.5 \quad (30) \quad 0.5 \quad (29) \quad 2 \quad (28) \quad 1 \quad (27) \quad 0.5 \quad (26)$$

$$-0.25, 1 \quad (47) \quad 2, 4 \quad (46) \quad 2 \quad (45) \quad \phi \quad (44) \quad 3 \quad (43) \quad 2 \quad (42) \quad 13 \quad (41) \quad 4 \quad (40) \quad 5 \quad (39) \quad 8 \quad (38)$$

$$\cdot \phi \quad (56) \quad 1.36 \quad (55) \quad 2, 3 \quad (54) \quad 1 \quad (53) \quad 4 \quad (52) \quad 5, 7 \quad (51) \quad 8 \quad (50) \quad 0.5 \quad (49) \quad \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \quad (48)$$

$$\sqrt{2}, \frac{1}{16} \quad (64) \quad 2 \quad (63) \quad \frac{1}{9} \quad (62) \quad 2, 4 \quad (61) \quad 2, \frac{1}{2^{13}} \quad (60) \quad 4, \frac{1}{4^6} \quad (59) \quad 9, \frac{1}{27} \quad (58) \quad 2 \quad (57)$$

$$49, 7^6 \quad (71) \quad \sqrt{5} \quad (70) \quad \sqrt{5} \quad (69) \quad 1, \frac{1}{4} \quad (68) \quad \frac{1}{9} \quad (67) \quad 0.2 \quad (66) \quad \frac{1}{3}, 3 \quad (65)$$

$$1.5a \text{ א. } 0.5a \text{ ב. } 2a \text{ א. } (75) \quad \frac{3a-1}{2} \text{ ב. } \frac{1-a}{2} \text{ א. } (74) \quad -a \text{ ב. } 3a \text{ א. } (73) \quad 2a \text{ ב. } a+1 \text{ א. } (72)$$

$$2a+b \text{ ב. } a+b \text{ א. } (78) \quad a+1-b \text{ ב. } a-2b \text{ א. } (77) \quad a+2b \text{ א. } a-b \text{ ב. } a+b \text{ א. } (76)$$

$$3 \quad (82) \quad \frac{2a-3b}{4} \text{ ב. } 2b-3a \text{ א. } (81) \quad \frac{a-3b}{5} \text{ ב. } \frac{b-2a}{2} \text{ א. } (80) \quad b+\frac{2}{3}a \text{ ב. } \frac{a+b}{2} \text{ א. } (79)$$

$$\frac{1}{27} \quad (92) \quad 243 \quad (91) \quad 27 \quad (90) \quad 8 \quad (89) \quad 16 \quad (88) \quad 64 \quad (87) \quad 9 \quad (86) \quad 2 \quad (85) \quad 6 \quad (84) \quad 12 \quad (83)$$

$$\frac{1}{81} \quad (101) \quad 0.25 \quad (100) \quad 2 \quad (99) \quad 5^6 \quad (98) \quad \sqrt{2} \quad (97) \quad 4 \quad (96) \quad 27 \quad (95) \quad 4 \quad (94) \quad \sqrt[4]{4} \quad (93)$$

$$\cdot \frac{2}{\sqrt[2]{25}} \quad (106) \quad \sqrt{216} \quad (105) \quad 3 \quad (104) \quad 1.5 \quad (103) \quad 10 \quad (102)$$

מעבר מבסיס לבסיס ומשוואות לוגריתמיות:

חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

$$\text{תזכורת: } \log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}, \quad a, m > 0 \neq 1, \quad b > 0$$

$$\log_2 5 \cdot \log_{25} 4 \quad (2) \quad \log_3 6 \cdot \log_6 3 \quad (1)$$

$$\log_{0.1} 5 \cdot \log_{25} 100 \quad (4) \quad \log_{27} 4 \cdot \log_2 3 \quad (3)$$

$$\log_5 8 \cdot \log_7 25 \cdot \log_2 49 \quad (6)$$

$$\log_{81} 49 \cdot \log_{32} 3 \cdot \log_7 2 \quad (8)$$

$$\log_6 \frac{1}{8} \cdot \log_2 6 = -3 \quad (10)$$

$$\log_3 8 \cdot \log_5 3 \cdot \log_2 5 = 3 \quad (12)$$

$$\log_{16} 3 \cdot \log_5 4 + \log_3 25 = 1 \quad (14)$$

$$\log_a b \cdot \log_c a + \log_b a \cdot \log_c b = \log_c ab \quad (16)$$

$$\log_{81} x + \log_3 x = 5 \quad (18)$$

$$\log_3 x + 3 \log_{27} x^2 = 3 \quad (20)$$

$$\log_5 x \cdot \log_{125} x = 3 \quad (22)$$

$$\log_3 (81x) \cdot \log_{27} \left(\frac{x}{9} \right) = \frac{7}{3} \quad (24)$$

$$\log_x 2 + \log_2 x = 2 \quad (26)$$

$$4 \cdot \log_x 5 = 3 + 2 \cdot \log_{25} x \quad (28)$$

$$\log_6 (16x - 3) \cdot \log_{x\sqrt{5}} 6 = 2 \quad (30)$$

$$\log_2 (4x) + \log_{8x} 4 = 3.5 \quad (32)$$

$$\log_x (27x) \cdot \log_{81x} \left(\frac{1}{3} \right) + \frac{4}{5} = 0 \quad (34)$$

$$3 \cdot \log_{\sqrt{x}} (6x) - \log_{36} x = 4 \quad (36)$$

$$\log_{\sqrt{3}} 7 \cdot \log_{\sqrt{343}} 9 \quad (5)$$

$$\log_4 169 \cdot \log_9 64 \cdot \log_{13} 243 \quad (7)$$

הוכח את השוויונים שלפניך:

$$\log_7 25 \cdot \log_5 7 = 2 \quad (9)$$

$$\log_4 25 \cdot \log_5 4 = 2 \quad (11)$$

$$\log_3 5 \cdot \log_5 8 + \log_3 2 \cdot \log_2 5 = \log_3 40 \quad (13)$$

$$\log_2 25 \cdot \log_5 9 \cdot \log_{81} 2 = 1 \quad (15)$$

פתור את המשוואות הבאות:

$$\log_2 x + \log_8 x = 4 \quad (17)$$

$$5 \log_5 x - \log_{\frac{1}{25}} x = 11 \quad (19)$$

$$\log_2 x^3 + 4 \log_{16} x = 8 \quad (21)$$

$$\log_2 (8x) \cdot \log_{16} x = 7 \quad (23)$$

$$\log_2 (32x^2) \cdot \log_8 \left(\frac{4}{x^3} \right) = -12 \quad (25)$$

$$\log_x 3 - 6 \log_{27} x = 1 \quad (27)$$

$$\log_3 (6-x) \cdot \log_x 3 = 2 \quad (29)$$

$$\log_5 x = 4.5 + \log_{5x} 125 \quad (31)$$

$$\log_x 4 + 3 \log_{4x} 16 = 4 \quad (33)$$

$$2 \log_{4x} 8 \cdot \log_x (16x) = 9 \quad (35)$$

$$\log_x 5 \cdot \log_{5x} (5x^2) = 2 \cdot \log_{25x} 5 \quad (37)$$

תרגילי הבעה – נוסחת המעבר בין בסיסים:

(38) נתון: $\log_2 5 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_5 2$

ב. $\log_4 5$

ג. $\log_{16} 5$

(39) נתון: $\log_4 6 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 3$

ב. $\log_{32} 36$

ג. $\log_{216} 96$

(40) נתון: $\log_3 5 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 15$

ב. $\log_{15} 3$

ג. $\log_9 25$

(41) נתון: $\log 2 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log 80$

ב. $\log_8 40$

ג. $\log_{80} 2000$

(42) נתון: $\log_5 6 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_{36} 30$

ב. $\log_{216} 180$

ג. $\log_{\frac{1}{6}} \sqrt{125}$

(43) נתון: $\log 2 = 0.3$. חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_{\sqrt{2}} 100$

ב. $\log_8 40$

ג. $\log_{\frac{1}{4}} 5$

(44) א. הוכח כי לכל $a, b > 0 \neq 1$ מתקיימת הטענה הבאה: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

ב. נתון: $\log_a 5 = b$. הוכח כי מתקיים: $\log_a b = \frac{b}{\log_b 5}$

ג. נתון: $2 \cdot \log_3 a \cdot \log_{(b+c)} 3 = 1$

הוכח כי לכל: $a, b, c > 0 \neq 1$ מתקיים: $a^2 = b + c$

פתור את המשוואות הבאות (הוצאת לוג משני אגפים):

$x^{1+\log_3 x} = 729$ **(47)**

$x^{\log_3 x} = 3$ **(46)**

$x^{\log_2 x} = 16$ **(45)**

$$x^{9-3\log_2 x} = \frac{x}{8} \quad (50)$$

$$x^{2\log_3 x+8} = 81x \quad (49)$$

$$x^{3\log_5 x+2} = 5 \quad (48)$$

תשובות סופיות :

(1) 1 (2) 1 (3) $\frac{2}{3}$ (4) -1 (5) $\frac{2}{3}$ (6) 2 (7) 12 (8) 15 (9) 0.1 (10) 8 (11) 8 (12) 18 (13) 81 (14) 19 (15) 25 (16) 3 (17) $\frac{1}{3}$, $\sqrt{3}$ (18) 2 (19) 0.07, 4 (20) $\frac{1}{243}$, 27 (21) $\frac{1}{128}$, 16 (22) $\frac{1}{125}$, 125 (23) 4 (24) $\frac{1}{625}$, 5 (25) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$, 2 (26) $\frac{1}{5\sqrt{5}}$, 5^5 (27) 0.2, 3 (28) 2 (29) $\frac{1}{36}$, 6^6 (30) $\frac{1}{\sqrt[3]{128}}$, 4 (31) $\frac{a+2}{3a}$.ג. $0.8a$.ב. $2a-1$.א. (32) $\frac{a}{4}$.ג. $\frac{a}{2}$.ב. $\frac{1}{a}$.א. (33) $\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$ (34) $\frac{1}{36}$, 6^6 (35) $\frac{1}{\sqrt[3]{128}}$, 4 (36) $\frac{1.5}{a}$.ג. $\frac{2a+1}{3a}$.ב. $\frac{a+1}{2a}$.א. (37) $\frac{a+3}{3a+1}$.ג. $\frac{2a+1}{3a}$.ב. $3a+1$.א. (38) a .ג. $\frac{1}{a+1}$.ב. $a+1$.א. (39) $13\frac{1}{3}$.א. $1\frac{7}{9}$.ב. $-1\frac{1}{6}$.ג. 0.25 , 4 (40) 3 , $\frac{1}{3}$ (41) 9 , $\frac{1}{27}$ (42) 9 , $\frac{1}{5}$ (43) $\sqrt[3]{5}$, $\frac{1}{81}$ (44) $\sqrt{3}$, $\frac{1}{81}$ (45) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, 8. (50)

אי-שוויוניים לוגריתמיים:

פתור את אי-השוויוניים הבאים:

$$\log_5(x-2) \leq 1 \quad (2)$$

$$\log_4(x-3) < 0 \quad (1)$$

$$\log(x+4) \geq \log(10-2x) \quad (4)$$

$$\log_{0.5}(3-x) < -2 \quad (3)$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2+3) > \log_{\frac{1}{3}}(x+5) \quad (6)$$

$$\log_2(x+2) < \log_2(2x-3) \quad (5)$$

$$\log_2(x^2-3x)-2 > 0 \quad (8)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) > 1 \quad (7)$$

$$\log_4 \frac{x+3}{x-2} > \frac{1}{2} \quad (10)$$

$$\log_2\left(x^2 - \frac{9}{16}\right) < 0 \quad (9)$$

$$\log_4^2 x - 3\log_4 x + 2 > 0 \quad (12)$$

$$\log_2 \frac{x-5}{x+2} \geq 1 \quad (11)$$

תשובות סופיות:

- (1) $3 < x < 4$ (2) $2 < x \leq 7$ (3) $x < -1$ (4) $2 \leq x < 5$ (5) $x > 5$ (6) $-1 < x < 2$ (7) $-\frac{1}{2} < x < 0$, $\frac{1}{2} < x < 1$ (8) $x < -1$, $x > 4$ (9) $-\frac{5}{4} < x < -\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4} < x < \frac{5}{4}$ (10) $2 < x < 7$ (11) $-9 \leq x < -2$ (12) $0 < x < 4$, $x > 16$.

נוסחאות - גבולות

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\text{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0) = 0$	$\text{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \sin x$	---	$\sin 0 = 0$	---
$y = \cos x$	---	$\cos 0 = 1$	---
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	---	1	---
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	e	(from right) 1	e
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	e	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm\infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm\infty$$

Undefined Limits :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

נוסחאות - נגזרות

1. $y = a \rightarrow y' = 0$
2. $y = f^n \rightarrow y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
3. $y = e^f \rightarrow y' = e^f \cdot f'$
4. $y = a^f \rightarrow y' = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
5. $y = \ln f \rightarrow y' = \frac{1}{f} \cdot f'$
6. $y = \sin f \rightarrow y' = \cos f \cdot f'$
7. $y = \cos f \rightarrow y' = -\sin f \cdot f'$
8. $y = \tan f \rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 f} \cdot f'$
9. $y = \cot f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 f} \cdot f'$
10. $y = \arcsin f \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
11. $y = \arccos f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
12. $y = \arctan f \rightarrow y' = \frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
13. $y = \operatorname{arccot} f \rightarrow y' = -\frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
14. $y = \sinh f \rightarrow y' = \cosh f \cdot f'$
15. $y = \cosh f \rightarrow y' = \sinh f \cdot f'$
16. $y = \tanh f \rightarrow y' = \frac{1}{\cosh^2 f} \cdot f'$
17. $y = \operatorname{coth} f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sinh^2 f} \cdot f'$
18. $y = f(x)^{g(x)} \rightarrow y' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln(f(x)))'$

נוסחאות - אינטגרלים

$$\int adx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln |\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln |f| + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

נוסחאות - טריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = (\pi - \alpha) + 2\pi k \end{cases} \\ \cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = -\alpha + 2\pi k \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k \\ \cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$$

נוסחאות - אלגברה

$$\left\{ \begin{array}{l} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \\ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab) \\ a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 \\ a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^m a^n = a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ (a^m)^n = a^{mn} \\ (ab)^n = a^n b^n \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \\ a^0 = 1 \\ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\ \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \\ a^x = b \Rightarrow x = \ln b \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a > 0, b > 0 \\ \ln a + \ln b = \ln ab \\ \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \\ \ln 1 = 0, \ln e = 1 \\ \ln e^n = n \\ \ln x^n = n \ln x \quad (x > 0) \\ e^{\ln x} = x \\ a^b = e^{b \ln a} \\ \ln x = k \Rightarrow x = e^k \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} |a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases} \\ |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \\ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \\ |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \\ |x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ or } x > a \end{array} \right.$$

נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות

<u>טור מקלורן</u>	<u>תחום התכנסות</u>
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$	$-1 < x < 1$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$	$-1 \leq x \leq 1 \quad (m > 0)$
	$-1 < x \leq 1 \quad (-1 < m < 0)$
$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$	$-1 < x < 1 \quad (m \leq -1)$
	$m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$