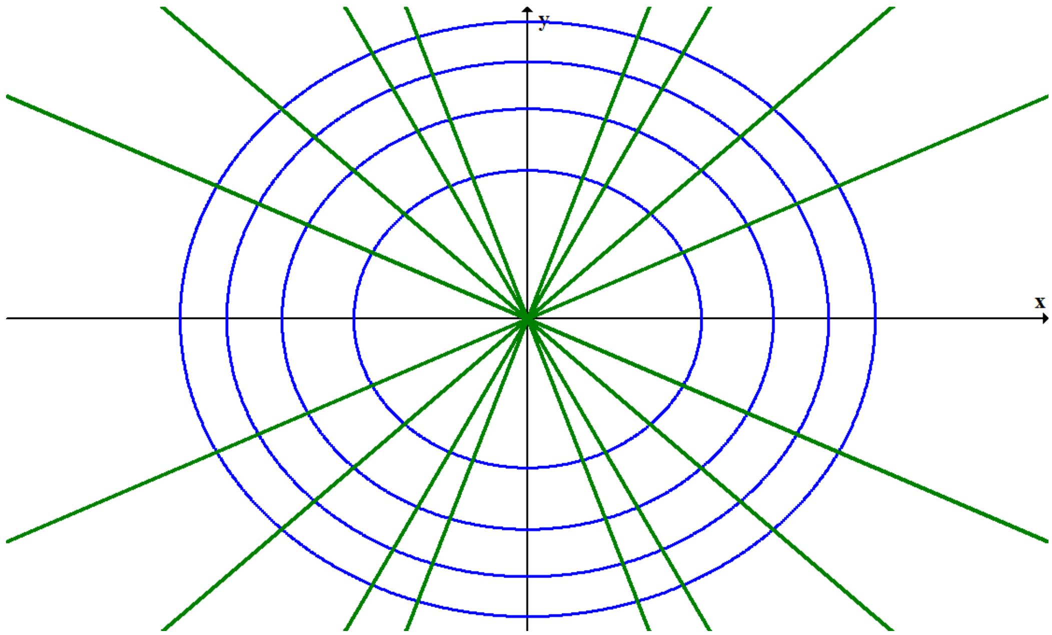
שיטות באנליזה



גיא סלומון

<u>סטודנטים יקרים</u>

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת מתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק במשוואות דיפרנציאליות רגילות (מד"ר או מישדי"פ) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתִרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il
הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון

תוכן

פרק 1 - התמרת לפלס

פרק 1.1 - התמרת/טרנספורם לפלס

1)הגדר והדגם את המושג התמרת לפלס.
חשב את התמרות לפלס הבאות בעזרת טבלת התמרות לפלס :

2) $L\left(t^2+4t-2\right)$ 3) $L\left(\frac{1}{2}t^4+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}+1\right)$ 4) $L\left(e^{-4t}+10e^{2t}\right)$ 5) $L\left(\cosh 4t\right)$

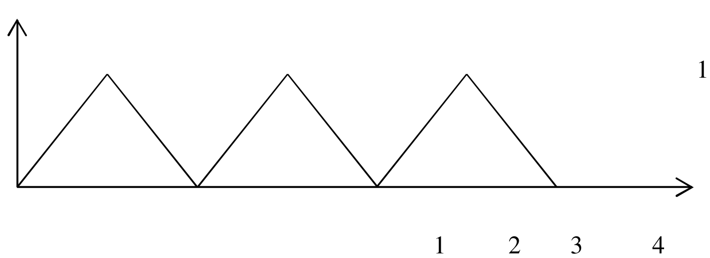
6) $L\left(\sinh 10t\right)$ 7) $L\left(\sin 2t\cos 2t\right)$ 8) $L\left(\sin 2t\cos 3t\right)$ 9) $L\left(\sin^2 t\right)$

10) $L\left(\cos^2 4t\right)$ 11) $L\left(t^2\sin 4t\right)$ 12) $L\left(t^4e^{2t}\right)$ 13) $L\left(e^{2t}\sin 4t\right)$

14) מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה $g(t)=\begin{cases} t & 0<t\le 1 \\ 1 & 1<t \end{cases}$.

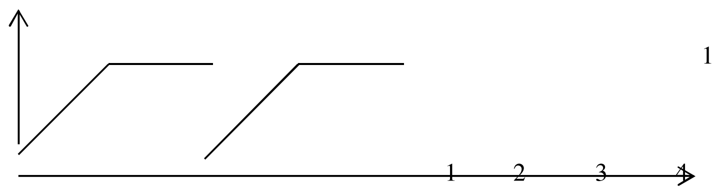
15) מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה $g(t)=\begin{cases} t & 0<t\le 1 \\ 2-t & 1<t \end{cases}$.

16) מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה **המחזורית** הבאה:



17) מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה **המחזורית** הבאה:

18) מצא טרנספורם לפלס של הפונקציה **המחזורית** הבאה:



19) הגדר ושרטט את פונקציית המדרגה $u(t)$ ואת ההזזה שלה $u(t-k)$.

20) שרטט את הפונקציה $f(t)=u(t-2)-u(t-3)$, כאשר $u(t)$ פונקציית המדרגה.

21) רשום את הפונקציה $f(t)=\begin{cases}0 & t\le 4\\ 1 & t>4\end{cases}$ בעזרת פונקציית המדרגה.

22) רשום את הנוסחה להתמרת לפלס של פונקציית המדרגה $u(t)$, של הפונקציה $u(t-k)$

ושל הפונקציה $f(t-k)u(t-k)$.

23) חשב את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה $g(t)=\begin{cases}0 & t<4\\ (t-4)^2 & t\ge 4\end{cases}$.

24) חשב את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה $g(t)=\begin{cases}0 & t<4\\ t^2 & t\ge 4\end{cases}$.

<u>תשובות:</u>

(2) $\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}-\frac{2}{s}$ (3) $\frac{12}{s^5}+s^{-3/2}+\frac{1}{s}$ (4) $\frac{1}{s+4}+10\frac{1}{s-2}$ (5) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-4}+\frac{1}{s+4}\right]$

(6) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-10}-\frac{1}{s+10}\right]$ (7) $\frac{1}{2}\frac{4}{s^2+16}$ (8) $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{s^2+25}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1}$ (9) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4}$

(10) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+64}$ (11) $\frac{8(3s^2-16)}{(s^2+16)^3}$ (12) $\frac{24}{(s-2)^5}$ (13) $\frac{4}{(s-2)^2+16}$ (14) $\frac{1-e^{-s}}{s^2}$

(15) $\frac{1-2e^{-s}}{s^2}$ (16) $\frac{1-2e^{-s}+e^{-2}}{s^2\left(1-e^{-2s}\right)}$ (17) $\frac{1-e^{-s}}{s\left(1+e^{-s}\right)}$ (18) $\frac{1-e^{-s}-se^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})}$

(21) $f(t)=\begin{cases}0 & t\le 4\\ 1 & t>4\end{cases}=u(t-4)$ (23) $\frac{2e^{-4s}}{s^3}$ (24) $\frac{2e^{-4s}(8s^2+4s+1)}{s^3}$

פרק 1.2 - התמרת לפלס ההפוכה ומשפט הקונוולוציה

חשב את התמרת לפלס ההפוכה:

1) $L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$

2) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right)$

3) $L^{-1}\left(\frac{1}{s-10}\right)$

4) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)$

5) $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)$

6) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s-10)^2+4}\right)$

7) $L^{-1}\left(\frac{s}{(s-2)^2+4}\right)$

8) $L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right)$

9) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)^2}\right)$

10) $L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)$

11) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4}\right)$

12) $L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^2+5s}\right)$

13) $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+5s+6}\right)$

14) $L^{-1}\left(\frac{s^2+s-1}{s^3-s}\right)$

15) $L^{-1}\left(\frac{6s^2+4s-6}{s^3-7s-6}\right)$

16) $L^{-1}\left(\frac{10s}{s^4-13s^2+36}\right)$

17) $L^{-1}\left(\frac{8s}{(s-2)^2(s+2)}\right)$

18) $L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^3+s^2}\right)$

19) $L^{-1}\left(\frac{9s+36}{s^3+6s^2+9s}\right)$

20) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2(s-4s+4)}\right)$

21) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s+3}\right)$

22) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right)$

23) $L^{-1}\left(\frac{2s^2+s-1}{\left(s^2+1\right)(s-3)}\right)$

24) $L^{-1}\left(\frac{2s^2+2s+1}{(s^2+1)(s+2)}\right)$

25) $L^{-1}\left(\frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)}\right)$

26) $L^{-1}\left(\frac{25s^2}{(s-1)(s^2+4)^2}\right)$

27) $L^{-1}\left(\frac{3}{s}-\frac{4e^{-s}}{s^2}+\frac{4e^{-3s}}{s^2}\right)$

28) $L^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s+1}+\frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right)$

29) $L^{-1}\left(\frac{e^{-10s}}{(s-1)(s-2)}\right)$

- בשאלה 27 הוסף סעיף ב המבקש לשרטט את הפתרון.

30) נתון $F(s)=\frac{e^{-s}+2}{s}$ חשב את $f(0)$ ו- $f(\infty)$ כאשר $f(t)=L^{-1}\left(F(s)\right)$.
פתור בשתי דרכים שונות.
הערה: $f(0)=\lim_{t\to 0} f(t)$, $f(\infty)=\lim_{t\to\infty} f(t)$

31) הסבר והדגם את משפט הקונוולוציה.

השתמש במשפט הקונוולוציה כדי לחשב:

32) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s-4)}\right)$ 33) $L^{-1}\left(\frac{2}{s^2(s^2+4)}\right)$

34) $L^{-1}\left(\frac{1}{s(s-4)^2}\right)$ 35) $L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)^2}\right)$

<u>תשובות:</u>

(1) 1 (2) $\frac{t^3}{3!}$ (3) e^{10t} (4) $\frac{1}{3}\sin 2t$ (5) $\cos 2t$ (6) $e^{10t}\frac{1}{2}\sin 2t$ (7) $e^{2t}\left\{\cos 2t+2\frac{1}{2}\sin 2t\right\}$

(8) $\frac{1}{4}t\sin 2t$ (9) $\frac{1}{2\cdot 2^3}\left(\sin 2t-2t\cos 2t\right)$ (10) $\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}}$ (11) $\frac{1}{4}e^{2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}$ (12) $1-2e^{-5t}$

(13) $3e^{-3t}-2e^{-2t}$ (14) $1+\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t}$ (15) $e^{-t}+2e^{-2t}+3e^{3t}$ (16) $e^{-3t}+e^{3t}-e^{-2t}-e^{2t}$

(17) $e^{2t}+4te^{2t}-e^{-2t}$ (18) $-6+5t+6e^{-2t}$ (19) $4-4e^{-3t}-3te^{-3t}$ (20) $2e^{t}+te^{t}-2e^{2t}+te^{2t}$

(21) $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\sin\sqrt{2}t$ (22) $\frac{1}{\sqrt{0.75}}e^{-0.5t}\sin\sqrt{0.75}t$ (23) $\sin t+2e^{3t}$ (24) $\cos t+e^{-2t}$ (25) $\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t$

(26) $e^{t}-\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t+5t\sin 2t+\frac{5}{4}(\sin 2t-2t\cos 2t)$ (27) $3-4u(t-1)\cdot(t-1)+4u(t-3)\cdot(t-3)$

(28) $u(t-4)e^{-(t-4)}+u(t+2)\sin(t+2)$ (29) $u(t-10)\left(e^{t-10}-e^{2(t-10)}\right)$ (30) $f(0)=2$ $f(\infty)=3$

(32) $-\frac{1}{2}(t^2+2t+2)+e^{t}$ (33) $0.5t-\frac{1}{4}\sin 2t$ (34) $\frac{1}{4}e^{4t}(t-1)+\frac{1}{4}$ (35) $\frac{1}{2}(-2\cos t+2-t\sin t)$

פרק 1.3 - פתרון מד"ר בעזרת התמרת לפלס

1)א. הסבר והדגם כיצד פותרים משוואה לינארית, מסדר שני, לא הומוגנית במקדמים קבועים על ידי התמרת לפלס.
ב.הסבר כיצד פועלים אם המד"ר מסדר כלשהו.
פתור את המשוואות הבאות בעזרת התמרת לפלס

2) $y(0)=0\ ;\ y'+4y=e^{-3t}$

3) $y(0)=-1\ ,\ y'(0)=4\ \ ;\ \ y''+4y'+4y=10e^{-2t}$

4) $y(0)=-1,\ y'(0)=-4\ ;\ y''-4y'=16$

5) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''+4y'=8t+2$

6) $y(0)=y'(0)=\dfrac{1}{4}\ \ ;\ 4y''-4y'=te^{t}+e^{t}$

7) $y(0)=y'(0)=0\ \ ;\ \ y''-3y'+2y=u(t-4)$

כאשר $u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}$ היא פונקציית המדרגה.

הערה: יש המסמנים $u(t-4)=u_4(t)$

8) $y(0)=y'(0)=0\ \ ;\ \ y''+y'=f(t)$

כאשר $f(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ 2 & t\geq 1\end{cases}$

9) $y(0)=y'(0)=0\ \ ;\ \ y''+5y'+6y=h(t)$

כאשר $h(t)=\begin{cases}1 & 0<t<2\\ 0 & t\geq 2\end{cases}$.

10) $y(0)=y'(0)=0, y''(0)=3\ \ ;\ \ y'''+4y''+5y'+2y=10\cos t$

תשובות:

(2) $y(t)=e^{-3t}-e^{-4t}$ (3) $y(t)=e^{-2t}(5t^2+2t-1)$ (4) $y(t)=-4t-1$ (5) $y(t)=t^2$

(6) $y(t)=\dfrac{1}{8}e^{t}(t^2+2)$ (7) $y(t)=u(t-4)\left(0.5-e^{t-4}+e^{2(t-4)}\right)$

(8) $y(t)=2u(t-1)\cdot\left(-1+(t-1)+e^{-(t-1)}\right)$

(9) $y(t)=\dfrac{1}{6}\left[1-3e^{-2t}+2e^{-3t}\right]-u(t-2)\dfrac{1}{6}\left[1-3e^{-2(t-2)}+2e^{-3(t-2)}\right]$

(10) $y(t)=-\cos t+2\sin t+2e^{-t}-2te^{-t}-e^{-2t}$

נספח- התמרת לפלס

הגדרה:

התמרת לפלס של פונקציה $g(t)$ שתסומן ב- $L[g(t)]$ הוא פונקציה חדשה במשתנה s שתסומן ב- $G(s)$ והמוגדרת ע"י: $G(s)=L[g(t)]=\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt$

ההתמרה ההפוכה נתונה ע"י: $L^{-1}[G(s)]=g(t)$

כללים:

1. אם $g(t)$ מחזורית עם מחזור ω אז התמרת לפלס נתונה ע"י: $G(s)=\dfrac{\int_0^\omega e^{-st}g(t)dt}{1-e^{-\omega s}}$

זכור:

$$\int e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$\int e^{-st}\cdot tdt=-\frac{1}{s^2}e^{-st}(st+1)$$

$$\int e^{-st}\cdot t^2dt=-\frac{1}{s^3}e^{-st}(s^2t^2+2st+2)$$

$$\int e^{-st}\sin(at)dt=\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}[-s\cdot\sin(at)-a\cos(at)]$$

$$\int e^{-st}\cos(at)dt=\frac{e^{-st}}{s^2+a^2}[-s\cdot\cos(at)+a\sin(at)]$$

2. $L[ag(t)+bh(t)]=aL[g(t)]+bL[h(t)]$

$$L^{-1}\left[aG(s)+bH(s)\right]=aL^{-1}[G(s)]+bL^{-1}[H(s)]$$

Examples : $L[2\sin t+5t^2]=2L[\sin t]+5L[t^2]$; $L^{-1}\left[\frac{4}{s}+5e^{-s}\right]=4L^{-1}[\frac{1}{s}]+5L^{-1}[e^{-s}]$

3. $L^{-1}[F(s)]=e^{-at}L^{-1}[f(s-a)]$

$$L^{-1}[F(s)]=e^{at}L^{-1}[f(s+a)]$$

Examples : $L^{-1}[\frac{1}{(s+2)^2+4}]=e^{-2t}L^{-1}[\frac{1}{s^2+4}]$; $L^{-1}[\frac{1}{(s-2)^2+4}]=e^{2t}L^{-1}[\frac{1}{s^2+4}]$

.4

$$L\left[ay'(t)+by(t)\right]=Y(s)[as+b]-y(0)[a]$$

$$L\left[ay''(t)+by'(t)+cy(t)\right]=$$
$$Y(s)[as^2+bs+c]-y(0)[as+b]-y'(0)[a]$$

$$L\left[ay'''(t)+by''(t)+cy'(t)+dy(t)\right]=$$
$$Y(s)[as^3+bs^2+cs+d]-y(0)[as^2+bs+c]-y'(0)[as+b]-y''(0)[a]$$

$$L\left[ay''''(t)+by'''(t)+cy''(t)+dy'(t)+ey(t)\right]=$$
$$Y(s)[as^4+bs^3+cs^2+ds+e]-y(0)[as^3+bs^2+cs+d]-y'(0)[as^2+bs+c]-y''(0)[as+b]-y'''(0)[a]$$

<u>פתרון מד"ר באמצעות התמרת לפלס:</u>

נתונה מד"ר מהצורה $ay''(t)+by'(t)+cy(t)=g(t)$ עם תנאי התחלה $y(0)=y_0\ ;\ y'(0)=y_1$.

<u>שלב I</u>

מפעילים את התמרת לפלס על שני אפי המשוואה ומקבלים:

$$L\left[ay''(t)+by'(t)+cy(t)\right]=L\left[g(t)\right]$$

מכאן: $Y(s)[as^2+bs+c]-y_0[as+b]-y_1[a]=G(s)$

<u>שלב II</u>

מבודדים מהמשוואה האחרונה את $Y(s)$ ומקבלים:

$$Y(s)=\frac{G(s)+y_0[as+b]+y_1[a]}{as^2+bs+c}$$

<u>שלב III</u>

מבצעים התמרת לפלס הפוכה לשני האגפים של המשוואה האחרונה ומקבלים את $y(t)$:

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{G(s)+y_0[as+b]+y_1[a]}{as^2+bs+c}\right]$$

נוסחאות - התמרת לפלס

$G(s)$	$g(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$(\text{for} n = 1, 2, 3\ldots)\, t^n$
$\frac{1}{s^n}$	$(\text{for} n = 1, 2, 3\ldots)\, \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$
$\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$	$t^{n-1} e^{at}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh(at)$
$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{t}{2a}\sin(at)$
$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(\sin(at) + at\cos(at))$
$\frac{a}{\left[(s+b)^2+a^2\right]}$	$e^{-bt}\sin at$
$\frac{s+b}{\left[(s+b)^2+a^2\right]}$	$e^{-bt}\cos at$
$\frac{2sa}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$t\sin at$
$\frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$t\cos at$

$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin(at)-at\cos(at))$
$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-3/2}$	$\sqrt{t}$
$\sqrt{\pi}s^{-1/2}$	$\frac{1}{\sqrt{t}}$
$\frac{1}{s}$	$u(t)$
$\frac{e^{-ks}}{s}$	$u(t-k)$
$e^{-ks}\cdot F(s)$	$u(t-k)f(t-k)$
$(-1)^n\left(F(s)\right)^{(n)}$	$t^n g(t)$

<u>תוספות:</u>

1.
נניח שנתונה התמרת לפלס ההפוכה $F(s)$ של פונקציה $f(t)$
ורוצים את $f(0)$ ו- $f(\infty)$.
אז במקום למצוא את $f(t)$ ולהציב ניתן להיעזר בנוסחאות הבאות:

$$f(0)=\lim_{s\to\infty} s\cdot F(s)$$

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} s\cdot F(s)$$

2.קונוולוציה:

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

$$\boxed{L\left(f(t)*g(t)\right)=F(s)\cdot G(s)}$$

$$L^{-1}\left(F(s)\cdot G(s)\right)=f(t)*g(t)$$

$$L^{-1}\left(F(s)\cdot G(s)\right)=\int_0^t f(x)g(t-x)dx$$