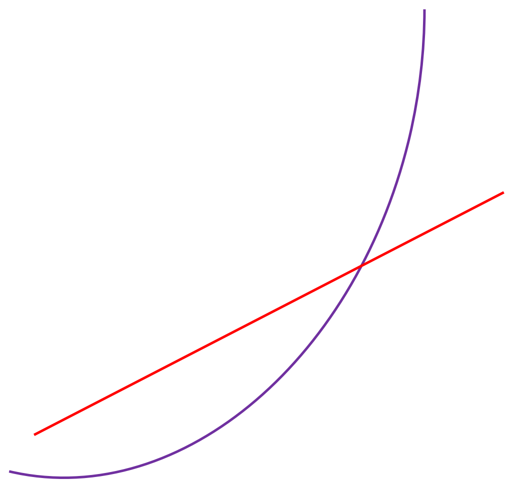
מתמטיקה ב'

מנהל עסקים



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי והוא מותאם אישית לסטודנטים למנהל עסקים במכללה למנהל.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכנית הלימוד במכללה. הניסיון מלמד כי לתִרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il
הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון

תוכן

<u>הערה</u>

<u>תרגילים הכתובים בצבע כחול מכילים</u>

<u>הסבר תיאורטי</u>

פרק 1 - חקירת פונקציה

לתשומת לבך! לפחות שליש מהשאלות בבחינת הגמר הן בסגנון השאלות בפרק עצום זה. כל השאלות בפרק זה הן בסגנון בחינות הגמר. כאשר הקלות יותר הן שאלות חימום. בבחינה מבקשים לעיתים חקירה מלאה אך לעיתים מבקשים רק סעיף או שניים מתוך החקירה.

1. הגדר את המושג נקודת קיצון. התייחס בתשובתך להבדל בין קיצון מקומי לקיצון מוחלט.
2. הסבר והדגם כיצד מוצאים נקודת קיצון ותחומי עליה וירידה לפונקצית פולינום .
3. הסבר והדגם כיצד מוצאים נקודת קיצון ותחומי עלייה וירידה לפונקציית מנה.
4. הסבר והדגם את המושג אסימפטוטה אנכית לגרף של פונקציה.
5. הסבר והדגם את המושג אסימפטוטה משופעת לגרף פונקציה.
6. הסבר והדגם את המושג נקודת פיתול.
7. הסבר והדגם כיצד מוצאים נקודת פיתול עבור פולינום.
8. הסבר והדגם כיצד מוצאים נקודת פיתול בפונקצית מנה.
9. הדגם והדגם כיצד מוצאים נקודת פיתול בפונקצית שורש.

חקור חקירה מלאה את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים :

תחום הגדרה ורציפות, נקודות חיתוך עם הצירים , זוגיות, אסימפטוטות אנכיות ומשופעות, נקודות קיצון ותחומי עליה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות, גרף.

10) $f(x)=x(x-9)^2$

11) $f(x)=x^4-2x^3$

12) $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$

13) $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

14) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

15) $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

16) $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

17) $f(x)=\frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

18) $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-4}$

19) $f(x)=\frac{x^3-x^2}{x^2-1}$

20) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

21) $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

22) $f(x)=x\cdot\ln x$

23) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1}{2-x}}$

24) $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-3$

25) $f(x)=4\ln^2 x-4\ln x-3$

26) $f(x)=\ln^2 x+\frac{1}{\ln^2 x}$

27) $f(x)=x-e^x$

28) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

29) $f(x)=(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}$

30) $f(x)=x\cdot e^{-2x^2}$

31) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

32) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)$

33) $f(x)=\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)^2$

34) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

הערות:

* בשאלה 18 מצא את החיתוך רק לאחר השרטוט.

**בתרגילים 8,17 אין צורך למצוא נקודות פיתול.

<u>מקסימום ומינימום מוחלטים/גלובליים של פונקציה</u>

(35) הסבר מהי נקודת קיצון מוחלטת / גלובלית של פונקציה ומצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה $f(x)=x^3-3x^2+3x$ בקטע $-1\le x\le 3$

(36) מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה $f(x)=\sqrt{-x^2+4x+5}$.

(37) מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה $f(x)=x^{2/3}(20-x)$ בקטע $-1\le x\le 20$

פרק 2 - בעיות מקסימום ומינימום

בעיות מקסימום ומינימום כלכליות במשתנה יחיד

1.הגדר והדגם את הפונקציות הכלכליות הבאות:

פונקציית ביקוש, פונקציית פדיון (הכנסות), פונקציית עלות (הוצאות), פונקציית עלות

ממוצעת, פונקציית רווח, פונקציה שולית ובמיוחד פונקציית עלות שולית.

2. כאשר חברת "יוטבתה" מוכרת x ליטר שוקו ליום היא יכולה לקבל מחיר של

$p(x)=-\frac{1}{4}x+10$ שקל לליטר.

א. מהו מחיר ליטר אחד אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
ב. מהו מחיר ליטר אחד אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
ג. מהי הכמות הנמכרת ביום אם המחיר הוא 6 ₪ לליטר?
ד. שרטט את הגרף של פונקציית הביקוש ומצא את תחום ההגדרה שלה.
ה. פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנה את נוסחת הפונקציה כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מהמוצר כפונקציה של מחירו.

3. פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x)=-0.6x+120$.

א. מצא את פונקציית הפדיון ואת התחום שלה.

ב. אם $x=20$ מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?

ג. אם המחיר הוא 12 ₪, מהו הפדיון?

4. פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא $R(x)=-0.08x^2+40x$.

א. מהו התחום של פונקציית הפדיון?
ב. שרטט את הגרף של פונקציית הפדיון.
ג. מצא את פונקציית הביקוש ושרטט את הגרף שלה.

5. פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x)=-0.4x+100$ שקל ליחידה.

א. מצא את תחום הפונקציה.
ב. מצא את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון הממוצע.
ג. מצא את פונקציית הפדיון השולי.
ד. לאיזה ערך של x יתקבל פדיון מקסימלי ומהו?

6. פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x)=-6x^2+240x+1800$.

א. מצא את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
ב. אם $x=40$ האם כדאי להגדיל את הייצור?
ג. מתי יהיה הפדיון מקסימלי ומהו?

7. פונקציית הביקוש למוצר מסוים נתונה ע"י: $Q(x)=10x-\frac{x^2}{5}$.

a. מצא את המחיר הנותן את הפדיון המקסימלי.
b. מהו הביקוש במקרה זה?
c. מהו הביקוש השולי בנקודת המחיר שמצאת? מה משמעותו?

8. פונקציית ההוצאות של יצרן המייצר x ק"ג קפה ביום היא $C(x)=5x+150$.

א. שרטט גרף של פונקציית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?
ב. מצא כמה ק"ג קפה מייצר היצרן אם ההוצאות הן 1000 ₪.
ג. מהן ההוצאות אם מייצרים 20 ק"ג קפה?
א. מצא את פונקציית ההוצאה השולית.

9. פונקציית העלות של יצרן כובעים היא $TC(x)=0.04x^2+10x+400$ שקל ליום.

א. חשב את העלות הממוצעת ליום אם הוא מייצר 40 כובעים.
ב. כמה כובעים עליו לייצר כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?
ג. חשב את העלות השולית ליום עבור $x=100$. איזו מסקנה ניתן להסיק מכך?

10. פונקציית העלות של מוצר מסוים היא $C(x)=0.004x^2+10x+200$.

א. חשב את העלות כאשר $x=100$ וכאשר $x=101$.
ב. חשב את העלות השולית כאשר $x=100$?
ג. חשב כמה תעלה יחידת מוצר נוספת כאשר היצור יעבור מ- $x=100$ ל- $x=101$ והשווה עם התוצאה של סעיף ב. מהי המסקנה?
ד. מצאו האם קצב השינוי של העלות גדל או קטן.

11. ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q)=100-0.06Q$ ופונקציית עלות כוללת $TC(Q)=200+4Q$.

מהי הכמות Q שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו.

מהו המקסימום במקרה זה?

12. לייצרן פונקציית ביקוש $P(Q)=20$ ופונקציית עלות $TC(Q)=300+2Q^2$.

מהי הכמות שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו.

מהו המקסימום במקרה זה?

13. לייצרן פונקציית ביקוש $P(Q)=-0.15Q+50$ ופונקציית עלות שולית

$MC(Q)=0.06Q^2+20$.

מהי הכמות שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו.

14. לייצרן פונקציית ביקוש $Q=\frac{5000-50P}{3}$ ופונקציית עלות $TC(Q)=200+4Q$.

מהי הכמות Q שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו.

מהו המקסימום במקרה זה?

15. לייצרן פונקציית עלות שולית $MC(Q)=0.06Q^2+20$. מצא את פונקציית העלות אם

ידוע שכאשר הכמות המיוצרת היא $Q=10$ אז העלות הכוללת היא 225 ₪.

16.א. הוכח שהרווח המקסימלי מתקבל כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית.

הסבר את המשמעות הגרפית.

ב. הוכח שאם מחיר המוצר קבוע אז הרווח המקסימלי מתקבל כאשר ההוצאה השולית שווה למחיר המוצר.

17. יעל נוהגת לעשות שופינג בכל יום בכיכר המדינה. לאחרונה החליטה יעל לשכור דירה לחודש (30 יום). אם הדירה נמצאת במרחק x ק"מ מכיכר המדינה דמי השכירות החודשיים הינם $P(x)=60-4x$. בכל יום יעל נוסעת הלוך ושוב לכיכר המדינה. הוצאות הנסיעה **לק"מ אחד** נתונות על-ידי $D(x)=\frac{x^2}{180}+\frac{2}{3x}$.

א. רשום את ההוצאה הכוללת של יעל, $TC(x)$.

ב. באיזה מרחק מכיכר המדינה על יעל לשכור את דירתה?

ג. שרטט גרף איכותי של $TC(x)$. הדגש את שיעורי נקודת הקיצון.

<u>נגזרות חלקיות</u>

חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות הבאות :

(בשאלות 23,24 חשב גם נגזרות חלקיות מסדר שני)

18) $f(x,y)=4x^3-3x^2y^2+2x+3y$

19) $f(x,y)=x^5\ln y$

20) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$ $\left(\text{only } f_x\right)$

21) $f(x,y)=\left(x^2+y^3\right)\cdot\left(2x+3y\right)$

22) $f(x,y)=\dfrac{x^2-3y}{x+y^2}$

23) $f(x,y)=4x^2-x^2y^2+4x+10y$

24) $f(x,y)=x^4\ln y$

מינימום ומקסימום לפונקציה של שני משתנים (ללא אילוץ)

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום,
מינימום או אוכף:

25) $f(x,y)=8x^3+12xy+3y^2-18x$

26) $f(x,y)=x^3+y^3-3x-12y+20$

27) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy+4$

28) $f(x,y)=3x-x^3-2y^2+y^4$

29) $f(x,y)=e^{4y-x^2-y^2}$

30) $f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$

31) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.
עלות הייצור של מחשבון בארץ היא 6$ ועלות ייצור מחשבון בסין היא 8$.
מנהל השיווק עומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ ואת הביקוש Q_2
למחשבון בסין על ידי:

$$Q_1=116-30P_1+20P_2$$
$$Q_2=144+16P_1-24P_2$$

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, P_1 ו- P_2, על מנת למקסם
את הרווח? מהו רווח זה?

מקסימום ומינימום לפונקציה של שני משתנים עם אילוץ (כופלי לגרנז')

אנא קראו הערה חשובה בדף הבא לפני שאתם ניגשים לפתרונות

32. נתונה בעיית הקיצון $Max\{xy\} \quad s.t. \quad x+3y=12$, פתור את הבעיה.

33. נתונה בעיית הקיצון $Max\{2x+y\} \quad s.t. \quad \sqrt{x}+\sqrt{y}=9$, פתור את הבעיה.

34. מוישלה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל (x, y) נתונה על ידי $u(x,y)=\ln x+\ln y$.
מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.
מוישלה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$ והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוישלה.

35. דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל (x, y) נתונה על ידי $u(x,y)=xy$.
מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.
לדני תקציב של 12 ש"ח. נסח ופתור את בעיית דני.

36. עקומת התמורה בין מנגו X ואננס Y היא $x^2+y^2=13$.
לדני תועלת $f(x,y)=4x+6y$.
דני מחפש את הסל (אננס,מנגו) = (x, y) , על עקומת התמורה , המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסח ופתור את הבעיה.

37. ליצרן פונקציית ייצור $Q=\sqrt{k}+\sqrt{L}$. המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K=2,\ P_L=1$. היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף (K^*, L^*) המביא למינימום את העלות. נסח את בעיית היצרן (אל תפתור).

<u>הערה חשובה לגבי המתכון לפתרון בעיות קיצון תחת אילוץ (כופלי לגרנז')</u>

הדרך בה אני מציג את הפתרונות תיראה לכם במבט ראשון שונה מהנעשה בהרצאה.

יחד עם זאת אני מבטיח לכם **שהדרך זהה לדרך שנלמדה בהרצאה**, היא פשוט חוסכת שלב אחד או שניים. על מנת שתהיו רגועים אני אפרט במספר שורות על דרך הפתרון בהרצאה ועל הדרך אותה אני מציג. כך גם נוכל לחזור על מתכון הפתרון.

נתחיל...

הבעיה העומדת לפנינו היא למצוא לפונקציה $f(x,y)$ מקסימום ומינימום בהינתן אילוץ $g(x,y)=0$ או $g(x,y)=k$.

שלב I - בשלב זה מוצאים נקודות חשודות כקיצון

בהרצאה מגדירים פונקציית לגרנז' $L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$

ואז על מנת למצוא נקודות חשודות כקיצון פותרים $1)\ \ L_x=0\,,\ 2)\ \ L_y=0\,,\ 3)\ \ L_\lambda=0$

היות ושלוש המשוואות הנ"ל מובילות לשלוש המשוואות הבאות:

$$\boxed{1)\ \ f_x=\lambda g_x\quad 2)\ \ f_y=\lambda g_y\quad 3)\ \ g(x,y)=0}$$

הרי שאני רושם אותן מיד וחוסך את שלב כתיבת פונקציית הלגרנז'.

שלב II- בשלב זה יש לבדוק האם הנקודות החשודות כקיצון הן קיצון או לא.

בהרצאה מחשבים את הדטרמיננטה $H=\begin{vmatrix}0 & g_x & g_y\\ g_x & f_{xx}-\lambda g_{xx} & f_{xy}-\lambda g_{xy}\\ g_y & f_{xy}-\lambda g_{xy} & f_{yy}-\lambda g_{yy}\end{vmatrix}$. ואז:

אם $H(x_0,y_0;\lambda)>0$ הנקודה (x_0,y_0) היא נקודת מקסימום בהינתן האילוץ.

אם $H(x_0,y_0;\lambda)<0$ הנקודה (x_0,y_0) היא נקודת מקסימום בהינתן האילוץ.

אני פיתחתי את הדטרמיננטה הנ"ל מראש, *הכפלתי במינוס אחת*, וקיבלתי

$$\boxed{H=(f_{xx}-\lambda g_{xx})\cdot(g_y)^2+(f_{yy}-\lambda g_{yy})\cdot(g_x)^2-2(f_{xy}-\lambda g_{xy})\cdot g_x\cdot g_y}$$. ואז:

אם $H(x_0,y_0;\lambda)<0$ הנקודה (x_0,y_0) היא נקודת מקסימום בהינתן האילוץ.

אם $H(x_0,y_0;\lambda)>0$ הנקודה (x_0,y_0) היא נקודת מקסימום בהינתן האילוץ.

i. ניתן גם לא להכפיל במינוס אחת ולעשות כמו בהרצאה.

פרק 3 - אינטגרלים

חשב את האינטגרלים הבאים (**אינטגרלים מידיים**):

1) $\int 4dx$

2) $\int x^4 dx$

3) $\int \frac{1}{x^2} dx$

4) $\int \sqrt{x} dx$

5) $\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$

6) $\int 4x^{10} dx$

7) $\int (2x^2 - x + 1) dx$

8) $\int (\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x}) dx$

9) $\int (x^2+1)^2 dx$

10) $\int (x^2+1)(x+2) dx$

11) $\int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx$

12) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$

13) $\int (4x+1)^{10} dx$

14) $\int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx$

15) $\int \frac{4}{(x-2)^5} dx$

16) $\int \sqrt[3]{4x-10} dx$

17) $\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx$

18) $\int \frac{1}{4x} dx$

19) $\int \frac{1+x+x^2}{x} dx$

20) $\int (1+\frac{1}{x})^2 dx$

21) $\int \frac{1}{4x-1} dx$

22) $\int \frac{x+3}{x+2} dx$

23) $\int \frac{4x+1}{x+2} dx$

24) $\int (e^{4x} + e^{-x}) dx$

25) $\int \left(e^{x+1}\right)^2 dx$

26) $\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$

חשב את האינטגרלים הבאים:

(27-37 : אינטגרציה בחלקים. 38-50: שיטת ההצבה. 51-56: חילוק פולינומים).

27) $\int xe^x dx$

28) $\int x^4 \ln x dx$

29) $\int (x^2+2x+3)\ln x dx$

30) $\int x^2 e^{-4x} dx$

31) $\int \ln x dx$

32) $\int \ln\frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

33) $\int x\cdot\ln\sqrt[5]{x-2} dx$

34) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

35) $\int x^2\ln(x^2+1) dx$

36) $\int \ln^2 x dx$

37) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$

38) $\int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2} dx$

39) $\int \sqrt{x^3+4}\cdot x^5 dx$

40) $\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$

41) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$

42) $\int \frac{1}{x\ln^4 x} dx$

43) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx$

44) $\int e^{x^2} x^3 dx$

45) $\int e^{\sqrt[3]{x}} dx$

46) $\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx$

47) $\int \ln^3 x dx$

48) $\int \frac{x^3 dx}{x^8+2}$

49) $\int \frac{\ln^4 x}{x} dx$

50) $\int \frac{dx}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}$

51) $\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx$

52) $\int \frac{2x+5}{\left(x^2-2x+1\right)^4} dx$

53) $\int \frac{3x^3-5x^2+4x-2}{x-1} dx$

54) $\int \frac{x^4+2x^3-10x^2-8x}{x+4} dx$

55) $\int \frac{12x^3-11x^2+6x-1}{4x-1} dx$

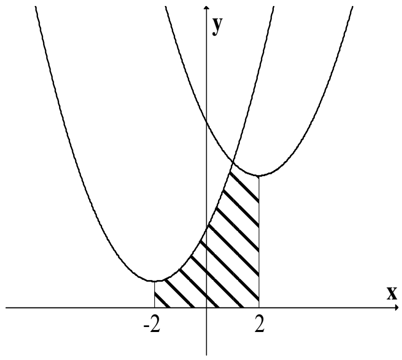
56) $\int \frac{x^4-2x^3+x^2+x}{(x-1)^2} dx$

פרק 4 - שימושי אינטגרל המסוים (שטח ואורך קשת)

חישוב שטחים

(1) נתונות שתי פונקציות :

$$f(x) = x^2 + 4x + 6$$
$$g(x) = x^2 - 4x + 14$$



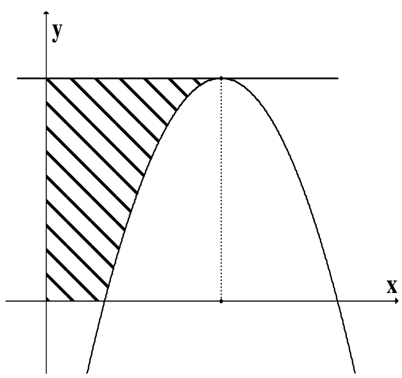
א. מצא את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי

הפונקציות, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים

x = -2 ו- x = 2 (השטח המקווקו בציור).

(2) נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 6x - 5$ (ראה ציור).



א. מצא את השיעורים של נקודת המקסימום של

הפונקציה.

ב. מהי משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה

בנקודת המקסימום שלה?

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי המשיק

בנקודת המקסימום, על ידי הצירים ועל ידי

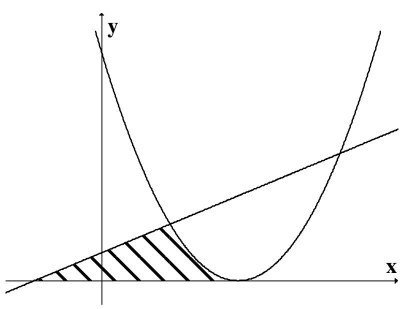
גרף הפונקציה (השטח המקווקו בציור).

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-2)^2$ ונתון הישר

$y = 0.5x + 0.5$ (ראה ציור). מצא את השטח

המוגבל על ידי גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x

(השטח המקווקו בציור).



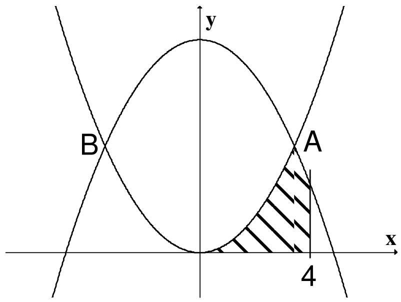
(4) נתונות הפונקציות :

$f(x)=x^2$

$g(x)=-x^2+18$

הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודות A ו- B

(ראה ציור).



א. מצא את שיעורי ה- x של הנקודות A ו- B.

ב. חשב את השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי

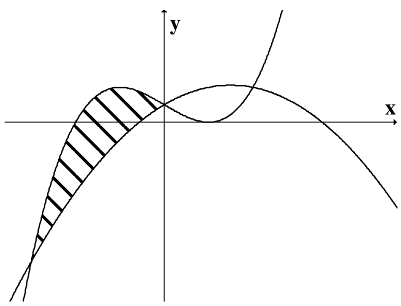
הגרפים של שתי הפונקציות, על ידי ציר ה- x ועל

ידי הישר x = 4 .

(5) נתונות שתי פונקציות :

$y=-x^2+3x+2$

$y=x^3-3x+2$



א. מצא את שיעורי ה- x של נקודות החיתוך בין

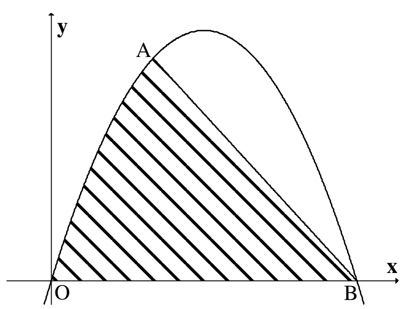
הגרפים של שתי הפונקציות.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי

הפונקציות, השטח המקווקו בציור.

(6) נתונה הפונקציה $f(x)=-x^2+ax$.

הפונקציה עוברת דרך הנקודה $A(2,8)$ (ראה ציור).



א. מצא את ערך הפרמטר a .

ב. הפונקציה חותכת את ציר x בנקודה O(0,0)

ובנקודה B . מצא את שיעורי הנקודה B.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף

הפונקציה, על ידי המיתר AB ועל ידי ציר

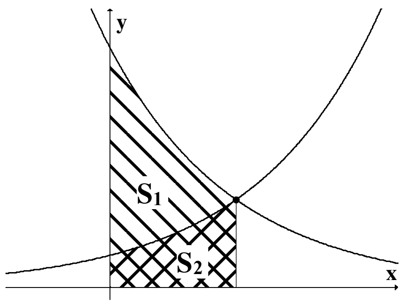
ה- x .

(7)

בציור שלפניך נתונות שתי הפונקציות :

$f(x) = e^{-x+2}$

$g(x) = e^{x}$



א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות עם ציר

y .

ב. מצא את נקודת החיתוך בין הפונקציות.

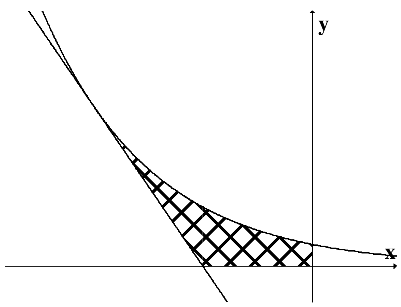
ג. חשב את היחס $\frac{S_1}{S_2}$ (ראה ציור).

(8)

נתונה הפונקציה $f(x) = e^{-2x}$.

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה

$x = -1$ (ראה ציור).



א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

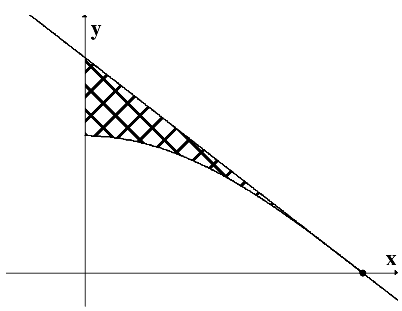
על ידי המשיק ועל ידי הצירים (השטח

המקווקו בציור).

(9)

נתונה הפונקציה $y = \cos 2x$ בתחום $0 \le x \le 4$

(ראה ציור).



ישר משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$.

א. מצא את משוואת המשיק .

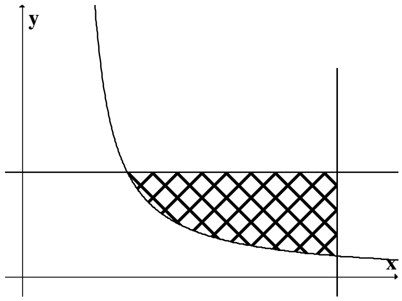
ב. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .

(10) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה

$y = \frac{1}{2x-1}$ ועל ידי הישרים $x = 3$ ו- $y = 1$

(השטח המקווקו בציור).

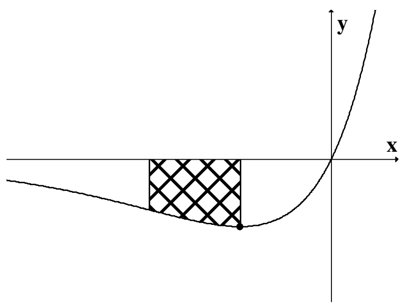


(11) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x} - e^{x}$.

לפונקציה יש מינימום כמתואר בציור.

א. מצא את שיעור ה- x של נקודת המינימום של הפונקציה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה העבירו אנך לציר ה- x . נתון כי השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי ציר ה- x , על ידי האנך ועל ידי הישר x=a , שווה ל- $3e^{2a} - e^{a}$, כאשר $a < \ln 0.5$. מצא את הערך של a .



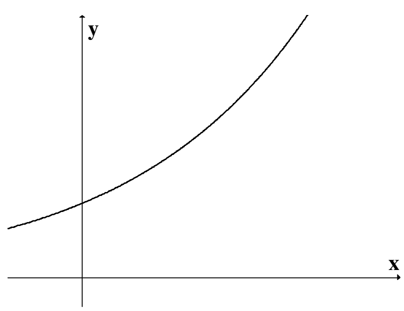
(12) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{\frac{x+1}{2}}$ (ראה ציור).

שיפוע הישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A, הוא $\frac{e^2}{2}$.

א. מצא את שיעורי הנקודה A .

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .



(13)

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{8}{x}-2$ בתחום $x>0$.

מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה

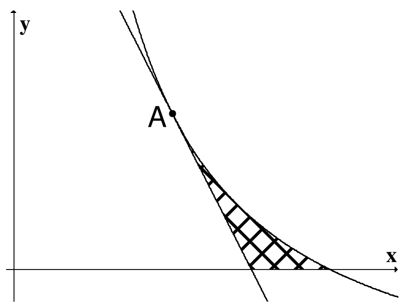
$A(2,2)$ (ראה ציור).

א. מצא את משוואת המשיק.

ב.חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- x (השטח המקווקו

בציור).



(14) נתונות הפונקציות :

$$f(x)=\sin x \ ; \ 0\le x\le \pi$$
$$g(x)=\cos 2x \ ; \ 0\le x\le \pi$$

א. תאר במערכת צירים את הגרפים של שתי הפונקציות הנתונות.

ב. קווקוו את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות הנתונות וחשב את גודלו.

(15)

נתונה הפונקציה $f(x)=tg^2x$ בתחום $-\frac{\pi}{2}<x\le 0$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-\frac{\pi}{4}$.

ב. הראה כי $\int tg^2xdx=tgx-x+c$ ומצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- x .

(16) דרך הנקודה $A(8,0)$ העבירו משיקים לפרבולה $y=x^2-10x+25$.

א. מצא את משוואות המשיקים.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני המשיקים והפרבולה.

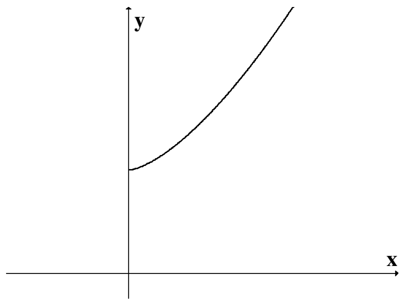
(17)

נתונה הפונקציה $f(x)=x\sqrt{x}+4$ בתחום $x\ge 0$.

(ראה ציור)

א. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה (0,0) ומשיק לגרף הפונקציה הנתונה.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה הנתונה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .



(18) א. חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x)=\cos^3 x$.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי ציר ה- x ועל ידי גרף הפונקציה $y=\cos^2 x\cdot\sin x$

בתחום $\frac{1}{2}\pi\le x\le\frac{3}{2}\pi$.

* לסטודנטים במקצועות ריאליים, ענו על סעיף ב ללא סעיף א.

(19) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2=-x$ והישר $y=x+6$.

(20) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $x=y^2+2$ והישר $y=x-8$.

(21) חשב את האינטגרלים הבאים: א. $\int_0^a\sqrt{x^2-a^2}\,dx$. ב. $\int_{-a}^a\sqrt{a^2-y^2}\,dy$.

<u>חישוב אורך עקום (קשת)</u>

(22) חשב את אורך העקום הנתון בסעיפים הבאים:

1) $y=\frac{x^4}{8}+\frac{1}{4x^2}$ $(1\le x\le 2)$

2) $y=x^{2/3}$ $(1\le x\le 8)$

3) $y=\frac{x^5}{15}+\frac{1}{4x^3}$ $(1\le x\le 2)$

4) $y=\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}$ $(0\le x\le 3)$

5) $y=\frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x)$ $(0\le x\le 3)$

6) $x^{2/3}+y^{2/3}=4$ $(1\le x\le 8)$

7) $x=3y^{3/2}-1$ $(0\le y\le 4)$

8) $y=\ln x$ $(1\le x\le 2)$

9) $y=x^2$ $(1\le x\le 2)$

פרק 5 - גזירת האינטגרל

(1) צטט את המשפט היסודי (השני) של החדו"א.

(2) על סמך המשפט היסודי הוכח כי אם $f(x)$ רציפה ו- $a(x), b(x)$ גזירות, אזי:

$$1)\ I(x)=\int_a^{b(x)} f(t)dt \ \Rightarrow\ I'(x)=f(b(x))b'(x)$$

$$2)\ I(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt \ \Rightarrow\ I'(x)=f(b(x))b'(x)-f(a(x))a'(x)$$

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

1) $I(x)=\int_2^x e^{-t^2}dt$ 2) $I(x)=\int_1^{x^3}\frac{\ln t}{t^2}dt$ 3) $I(x)=\int_2^{x^3+x} t\ln t\,dt$ 4) $I(x)=\int_{x^3}^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

(4) חשב את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{tdt}{\cos t}}{\sin^2 x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt$ 3) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x}{x-4}\int_4^x e^{t^2}dt$

(5) חקור את הפונקציה $F(x)=\int_0^x (t+1)^4(t-1)^{10}dt$ לפי הפירוט הבא:

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עליה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

פרק 6 - אינטגרלים לא אמיתיים (מוכללים)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

1) $\int_1^\infty \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$ 2) $\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ 3) $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$ 4) $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

5) $\int_1^\infty xe^{-x^2}$ 6) $\int_1^\infty \frac{x}{x^2+5}$ 7) $\int_1^\infty x^2e^{-2x}dx$ 8) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2}$

(2) בדוק את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים :

1) $\int_1^\infty \frac{x^2+2x+1}{x^4+4x^2+5}dx$ 2) $\int_1^\infty \frac{x^2+2x+1}{x^3+4x^2+5}dx$ 3) $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^4}dx$ 4) $\int_3^\infty \frac{\sin x\cdot\ln x}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx$

5) $\int_1^\infty \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)dx$ 6) $\int_2^\infty \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}dx$ 7) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}dx$ 8) $\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1+x^2}dx$

(3) חשב את השטח בין גרף הפונקציה $y=e^{2x}$, הישר $x=1$ וציר x עבור $x\le 1$.

(4) חשב את השטח בין גרף הפונקציה $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, ציר ה- y , ציר ה- x והישר $x=5$.

נוסחאות - גבולות

	$x\to-\infty$	$x\to 0$	$x\to\infty$
$y=\frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty}=0$	$\frac{1}{0^+}=\infty,\ \frac{1}{0^-}=-\infty$	$\frac{1}{\infty}=0$
$y=e^x$	$e^{-\infty}=0$	$e^0=1$	$e^\infty=\infty$
$y=\ln x$	$---$	$\ln(0^+)=-\infty$	$\ln(\infty)=\infty$
$y=\arctan x$	$\text{atan}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0)=0$	$\text{atan}(\infty)=\frac{\pi}{2}$
$y=a^x, a>1$ $y=a^x, 0<a<1$	$a^{-\infty}=0$ $a^{-\infty}=\infty$	$a^0=1$ $a^0=1$	$a^\infty=\infty$ $a^\infty=0$
$y=\sin x$	$---$	$\sin 0=0$	$---$
$y=\cos x$	$---$	$\cos 0=1$	$---$
$y=\frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y=\frac{\tan x}{x}$	$---$	1	$---$
$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$	e $---$	(from right) 1 e	e 1
$y=\sqrt{x}$ $y=\sqrt[3]{x}$	$---$ $-\infty$	$\sqrt{0^+}=0$ $\sqrt[3]{0}=0$	$\sqrt{\infty}=\infty$ $\sqrt[3]{\infty}=\infty$

Defined Limits:

$\infty\cdot\infty=\infty$, $\infty(-\infty)=-\infty$, $\infty+\infty=\infty$, $\infty\pm a=\infty$, $\infty\cdot(\pm a)=\pm\infty$, $\infty/(\pm a)=\pm\infty$

Undefined Limits:

$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0$

נוסחאות - אלגברה

$$\begin{cases} (a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \\ (a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \\ (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \\ (a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\ (a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+b^2=(a+b)^2-2ab \\ a^2-b^2=(a-b)(a+b) \\ a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab) \\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab) \\ a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2 \\ a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^m a^n=a^{m+n} \\ \dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n} \\ \left(a^m\right)^n=a^{mn} \\ (ab)^n=a^n b^n \\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n} \\ a^0=1 \\ a^{-n}=\dfrac{1}{a^n} \\ \sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}\ ,\ \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} \\ a^x=b \Rightarrow x=\ln b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a>0, b>0 \\ \ln a+\ln b=\ln ab \\ \ln a-\ln b=\ln\dfrac{a}{b} \\ \ln 1=0\ ,\ \ln e=1 \\ \ln e^n=n \\ \ln x^n=n\ln x\ (x>0) \\ e^{\ln x}=x \\ a^b=e^{b\ln a} \\ \ln x=k \Rightarrow x=e^k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=a\cdot d-b\cdot c \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |a|=\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & if\ \ a\ge 0 \\ -a & if\ \ a<0 \end{cases} \\ |a\cdot b|=|a|\cdot|b| \\ \left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|} \\ |x|<a \Leftrightarrow -a<x<a \\ |x|>a \Leftrightarrow x<-a\ or\ x>a \end{cases}$$